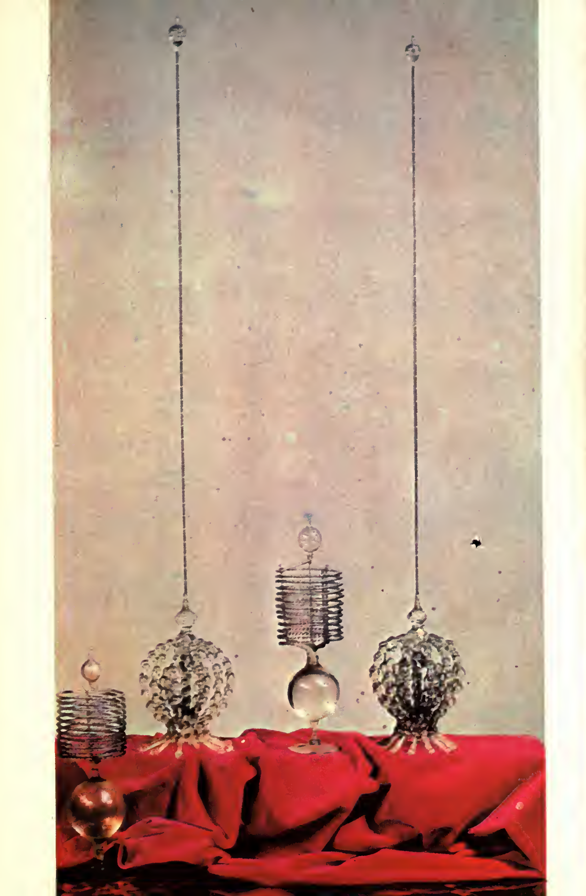

квант
1976
6
Научно-популярный
физико-математический
журнал



Основан в 1970 году

Квант

1976
6

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Издательство „Наука"
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Красивые стеклянные приборы, которые вы видите на второй странице обложки, это термометры, сделанные во флорентийской Академии опытов в середине XVII века. Об истории создания термометров рассказывается в статье А. Кикоина (с. 13)





КОМБИНАТОРНО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ОТЧАСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ТРАКТАТ

Известна притча об умной сороконожке, которая разучилась ходить, размышляя о том, в каком порядке ей следует переставлять свои многочисленные ножки. Восемьдесят-девяносто лет тому назад похожая история произошла с математиками: они задумались над тем, насколько обоснованны их умозаключения при доказательстве теорем. После почти двадцати лет волнений и напряженных трудов были выработаны те нормы математической строгости, по которым строится любая «уважающая себя» теория и в наши дни, и стало, наконец, ясно, что математика избежит участи несчастной сороконожки.

Тогда же было спасено от разрушения и реставрировано величественное и вместе с тем стройное здание евклидовой геометрии; с тех пор ее вечным фундаментом стали 20 аксиом, описанных Давидом Гильбертом в его «Основаниях геометрии»*). Евклидову геометрию можно сравнить со знаменитым Кельнским собором (который строился, достраивался и перестраивался многими поколениями строителей, навсегда селившихся рядом с соборной площадью и передававших детям свое ремесло и рабочее место).

Совсем иначе устроены *конечные геометрии*: минимум строительного материала — конечное число точек, прямых и плоскостей, минимум правил обращения с этим материалом — три-четыре аксиомы, регулирующие отношения между точками, прямыми и плоскостями.

Может показаться, что в этом царстве «стекла и алюминия» нет ни тайн, ни загадок. Это далеко не так, и вот пример: несмотря на усилия трех поколений математиков, до сих пор неизвестно, существует ли *аф-*

*) Эта замечательная книга учит нас скромности и точности: даже просто полистав ее, нельзя не понять, что мы умеем доказывать кое-какие теоремы планиметрии, не зная, однако, из чего мы при этом исходим.

финная конечная плоскость (см. § 1) из 100 точек.

§ 1. Мини-евклидова, а точнее — конечная аффинная плоскость

Элементы, из которых строится мини-плоскость — «точки» и «прямые». (Это всего лишь названия, которые, как увидит читатель, далеки от привычного значения этих слов. Д. Гильберт говорил, что «точки», «прямые» и «плоскости» можно было бы с тем же успехом называть «стульями», «столами» и «кружками».) Точка A может л е ж а т ь н а прямой a; то же можно выразить иначе: точка A п р и н а д л е ж и т прямой a, прямая a п р о х о д и т ч е р е з точку A, прямая a с о д е р ж и т точку A. О точках и прямых допустимы любые другие высказывания, которые можно выразить через это основное отношение: утверждение «прямые a и b *пересекаются*» означает, что существует единственная точка, которая лежит как на прямой a, так и на прямой b; «прямые a и b *параллельны*», если они не пересекаются, и т. д.

Конечную совокупность точек и прямых с отношением «лежать на» или «принадлежать» мы будем называть *конечной аффинной плоскостью*, если выполнены следующие три а к с и о м ы.

А к с и о м а A1. *Через любые две точки плоскости проходит единственная прямая.*

А к с и о м а A2. *Через всякую точку, не лежащую на прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.*

А к с и о м а A3. *Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

Пояснения к аксиомам A1—A3

1. Первая аксиома перенесена сюда из евклидовой геометрии без изменений, вторая соответствует аксиоме о параллельных в евклидовой геометрии (знаменитый Пятый Постулат), третья аксиома избавляет нас от вырожденных геометрий, вроде той, которая изображена на рис. 1, *а*).

2. В нашей мини-планиметрии лишены смысла высказывания: «точка A принадлежит отрезку BC», отрезок AB конгруэнтен отрезку CD», «точка A лежит внутри угла BCD», «углы ABC и DEF конгруэнтны» и многие, многие другие привычные нам понятия и утверждения.

3. Вся информация о любой прямой содержится в перечне точек, которые лежат на этой прямой; поэтому вполне допустим (хотя совсем и не обязателен) такой взгляд на вещи: плоскость — это конечное множество точек, прямые — разные наборы из этих точек.

Минимальная из мини-плоскостей, удовлетворяющих нашим трем аксиомам, содержит четыре точки и шесть прямых; ее условное изображение приведено на рис. 1, *б*). Условность этого рисунка и многих других рисунков в нашем трактате в том, что на нем обычные точки соответствуют точкам конечной плоскости, обычные прямые — прямым конечной плоскости, а обычное отноше-

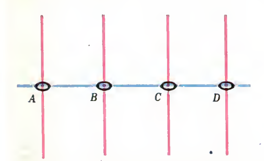


Рис. 1. а) «Вырожденная» геометрия (нарушена Аксиома A3!).

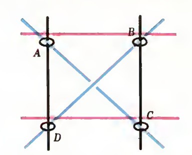


Рис. 1. б) Плоскость с четырьмя точками и шестью прямыми. Прямые AC и BD параллельны!

ние принадлежности («лежать на» или «принадлежать») отвечает отношению принадлежности конечной плоскости. Но не всегда конфигурации конечной плоскости вкладываются в обычную плоскость без каких-либо, иногда забавных, нарушений ее евклидовой структуры. Например, на рисунке 1, *б* диагонали «квадрата» $ABCD$ параллельны друг другу!

Задача 1. Докажите, что любая конечная аффинная плоскость содержит не менее четырех точек и шести прямых. (Вот почему плоскость на рисунке 1, *б*) минимальна.)

Итак, фундамент заложен. Построение геометрии на конечной аффинной плоскости мы начнем с нескольких очевидных теорем; прочитав условие очередной теоремы, попытайтесь доказать ее сами, и лишь потом проверьте себя, просмотрев наше доказательство (начало доказательства помечено значком □, а конец — ■).

Теорема А4. *Если параллельные прямые имеют общую точку, то они совпадают.*

□ По определению параллельные прямые не могут иметь единственную общую точку. Поэтому у них не меньше двух общих точек и по аксиоме А1 они должны совпадать ■

Теорема А5. *Существуют три прямые, попарно пересекающиеся в трех разных точках.*

□Пусть три точки A, B и C не лежат на одной прямой (Аксиома А3; рис. 2); тогда три прямых a, b и c, проходящих по Аксиоме А1 через пары точек (B, C), (A, C) и (A, B) соответственно, попарно пересекаются: прямые a и b — в точке C, прямые a и c — в точке B, прямые b и c — в точке A.■

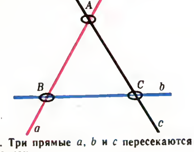


Рис. 2. Три прямые a, b и c пересекаются в трех точках.

Теорема А6. *Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b — прямой c, то a и c параллельны.*

□Если какие-то две из прямых a, b и c совпадают, то утверждение очевидно. Если же все они попарно различны и прямые a и c пересекаются в точке, скажем A, то прямая b не проходит через точку A (иначе прямые a и b не параллельны). Тогда по аксиоме А2 через точку A может проходить только одна прямая, параллельная прямой b, что приводит к противоречию ■

Доказательства этих трех простеньких теорем служат, с одной стороны, хорошим примером того, как проводятся в нашей геометрии доказательства, а с другой стороны — основой более сложных доказательств теорем из § 2. Теоремы А7 и А8 дальше не используются, и читателю предлагается доказать их самостоятельно.

Теорема А7. *На каждой прямой любой конечной аффинной плоскости лежит не менее двух различных точек.*

Теорема А8. *В любой точке конечной аффинной плоскости пересекаются не менее трех прямых.*

Мы сравнивали Аксиомы А1—А3 с фундаментом конечной аффинной геометрии — теоремы А4—А8 образуют ее «первый этаж».

§ 2. Порядок аффинной плоскости

Из 16 космонавтов нужно выбрать 4 — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с 4 экипажами по 4 человека в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

Можно ожидать, что все прямые на нашей плоскости неотличимы друг от друга; по крайней мере так обстоит дело в евклидовой геометрии, где

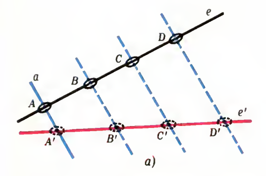


Рис. 3а. Пучок параллельных прямых.

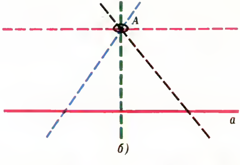


Рис. 3б. Через точку A проходит столько прямых, сколько точек лежит на прямой a, плюс одна.

существует возможность наложения одной прямой на другую. В конечной аффинной геометрии такой возможности у нас нет. Поэтому попытаемся обойтись тем, что имеется в нашем распоряжении: проводить прямые, искать точки пересечения прямых и т. п.

Теорема А9. *Любые две прямые e и e' конечной аффинной плоскости содержат одинаковое число точек.*

□Каждая из прямых e и e' пересекается по крайней мере с двумя из прямых a, b и c Теоремы А5. Поэтому одна из этих трех прямых, скажем a, пересекается как с прямой e, так и с прямой e'. Установим теперь с помощью этой прямой a взаимно однозначное соответствие между точками прямых e и e'.

Для этого каждой точке A на e сопоставим ту точку A' на e', которая получается от пересечения e с прямой a' (А2)*), проходящей через A и параллельной a. При этом разным точкам на e будут соответствовать разные точки на e' (А2); очевидно, также, что любая точка B' на e' будет отвечать некоторой точке B на e (см. рис. 3а). ■

Определение. *Порядком конечной аффинной плоскости называется число точек на любой прямой этой плоскости.*

Порядок — самая важная числовая характеристика аффинной плоскости. Как мы увидим, нетрудно построить плоскость, порядок которой равен любому заранее указанному простому числу; сложнее (и мы не сможем уделить этому места в нашем трактате) построить плоскость, порядок которой равен степени простого числа. Известно, что не существует плоскости порядка 6, и неизвестно, существует ли плоскость порядка 10.

Теорема, к которой мы сейчас перейдем, является, в каком-то смысле, перевернутым изображением А9: в ней поменялись местами точки и плоскости. Такие теоремы называются *двойственными* друг другу.

Теорема А10. *Через любую точку плоскости проходит одинаковое число прямых: для плоскости порядка n это число равно $n+1$.*

□Пусть a — произвольная прямая, и пусть точка A не принадлежит прямой a (А3). Тогда существует единственная прямая, проходящая через точку A и параллельная прямой a (А2), а любая другая прямая, проходящая через точку A, пересекается с прямой a в единственной точке (А4), причем разные прямые пересекаются (см. рис. 3б) в разных точках (А1). Отсюда следует, что число прямых, проходящих через точку A, равно числу точек на прямой a, т. е. порядку аффинной геометрии (см. А9), увеличенному на единицу ■

Задача 2. Докажите, что условие задачи М364 («Квант», 1976, № 1, см. также эпиграф) эквивалентно утверждению: существует конечная аффинная плоскость порядка 4.

Теорема А11. *Если порядок плоскости равен n, то любая прямая плоскости принадлежит семейству (пучку), состоящему из n различных попарно параллельных прямых.*

*) Мы и дальше будем для краткости писать А2, А5 и т. д. вместо «Аксиома А2», «Теорема А5».



Рис. 4. Пучок прямых, параллельных e, строится по точкам прямой a.

□Пусть e — произвольная прямая, тогда одна из трех прямых, скажем a, теоремы А5 пересекается с прямой e в точке E. Очевидно, что через любую точку на прямой a, исключая точку E, проходит единственная прямая, параллельная прямой e (А2), и наоборот (рис. 4), любая прямая, параллельная прямой e, пересекает прямую a в некоторой точке (см. А6). Мы установили взаимно однозначное соответствие между точками прямой a и прямыми пучка параллельных прямых, которому принадлежит прямая e ■

Теорема А12. *Любая плоскость порядка n содержит n^2 точек и n^2+n прямых.*

□Любой пучок прямых, параллельных данной прямой, будет содержать все точки конечной плоскости: в противном случае, по Аксиоме А2 это семейство можно было бы дополнить еще одной прямой, параллельной данной прямой и проходящей через еще «не охваченную» пучком точку. Но в любом таком семействе n прямых (А11), а на каждой прямой n точек (А9), т. е. всего n^2 точек (рис. 5).

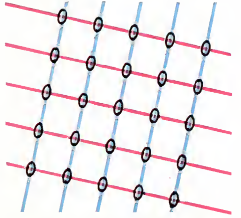


Рис. 5. Два пучка параллельных прямых, пересекаясь, дают все точки плоскости.

Подсчитаем теперь число прямых на конечной плоскости порядка n. Так как через каждую точку плоскости проходит $n+1$ прямых (А10), и так как каждое семейство попарно параллельных прямых имеет среди этих $n+1$ прямых своего «представителя» (А2), то общее число таких семейств равно $n+1$, а каждое семейство содержит n прямых (А11), причем всякая прямая попадает ровно в одно такое семейство (А6). Следовательно, общее число прямых на плоскости равно $n(n+1)=n^2+n$■

§ 3. О пользе военных парадов, когда их наблюдает великий математик

Свою знаменитую головоломку о 36 офицерах Леонард Эйлер придумал, по-видимому, скучая на одном из многочисленных петербургских дворцовых парадов. Вот ее формулировка: среди 36 офицеров поровну уланов, драгунов, гусаров, кирасиров, кавалергардов и гренадеров, и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков, и подпоручиков, причем полк каждого из «родов войск» представлен офицерами всех шести рангов. Можно ли выстроить этих офицеров в каре 6×6 так, чтобы в любой колонне и любой шеренге встречались офицеры всех полков и всех рангов? (Решение этой задачи, когда требуется по тем же правилам построить каре из 25 офицеров, изображено на обложке журнала.)

Проницательный читатель уже связал головоломку Эйлера с задачей построения конечной аффинной плоскости порядка 6, в которой точки будут офицерами, а прямые объединяют офицеров либо одного полка, либо одного ранга. Читатель, разумеется, прав, но с одной оговоркой: мы покажем, что если для некоторого n ($n>2$) существует конечная аффинная плоскость порядка n, то существует и требуемое расположение n^2 офицеров в каре $n\times n$ (у Эйлера $n=6$); однако обратное, вообще говоря, неверно. Например, при $n=14$ плоскости порядка 14 не существует (см. ниже Теорему 2), а задача Эйлера имеет решение.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,
41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60,
61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80,
81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

Рис. 6. Таблица «хороших», «плохих» и «еще не проявивших себя» чисел.

Задача 3. Постройте 196 офицеров (по 14 офицеров всех 14 рангов из 14 полков) в каре Эйлера 14×14

Согласно Теореме А12 плоскость порядка n содержит n^2 точек — они-то и будут нашими офицерами. Из $n+1$ семейства параллельных прямых (см. А10 и А11) выберем четыре различных семейства (для этого должно выполняться неравенство $n+1\geqslant4$, т. е. $n>2$). Чтобы различать эти семейства прямых, присвоим одному из них номер один, другому номер два и т. д. Так же в произвольном порядке занумеруем прямые в каждом из этих четырех семейств. Все точки, принадлежащие первой прямой первого семейства, назовем гусарами, второй прямой этого семейства — уланами и т. д. — всего n названий полков. Все точки из первой прямой второго семейства мы назовем генералами, второй прямой этого семейства — полковниками и т. д. — всего n рангов.

Задача 4. Докажите, что среди гусаров встречаются офицеры всех рангов; то же с уланами, драгунами и т. д.

Для построения каре мы рассмотрим третье семейство параллельных прямых и сформируем первую колонну каре из «офицеров» первой прямой третьего семейства, вторую колонну — второй прямой и т. д., причем порядок офицеров в каждой колонне будет определяться прямыми четвертого, последнего семейства: в первой шеренге нашего каре разместятся «участники» первой прямой четвертого семейства, вторую шеренгу составят офицеры из второй прямой и т. д.

Задача 5. Докажите, что описанный способ построения каре приводит к цели.

§ 4. Красное, черное и синее

Головоломка Эйлера привела нас к одному из самых интересных вопросов теории конечных геометрий: *какие бывают конечные аффинные плоскости?* Для нас, начинающих мини-геометров, было бы достаточно найти ответ на более узкий вопрос: *для каких n существует конечная аффинная плоскость порядка n?*

Полного решения этой проблемы до сих пор нет. Все, что известно, исчерпывается двумя замечательными теоремами.

Теорема 1. *Если число n простое или степень простого, то плоскость порядка n существует.*

Мы докажем эту теорему в § 5 для всех простых чисел n *).

Теорема 2. *Если число n при делении на 4 дает в остатке 1 или 2 и если в разложении этого числа на простые множители встречается в нечетной степени хотя бы одно простое число p вида $p = 4k+3$, то конечной аффинной плоскости порядка n не существует.*

Первое из чисел, удовлетворяющих условию теоремы 2, — число $n=6$: $6=4+2$ и $6=2\cdot3$. Итак, плоскости из 36 точек не существует! (Замечательная интуиция Эйлера

*) Для степеней простых чисел доказательство сложнее. (См., например, книгу М. Холла «Комбинаторика», «Мир», 1970. Эту великолепную книгу можно читать выборочно, «обходя» непонятные места.)

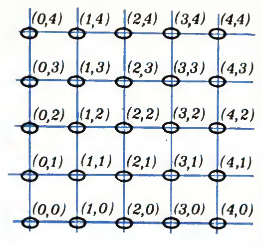


Рис. 7. Так вводятся координаты на аффинной плоскости (например, точка A имеет координаты (2,2)). Наоборот, из набора n^2 точек ($n = 5$), заданных координатами, можно построить аффинную плоскость.

позволила ему выбрать единственный «сомнительный» случай из большого числа близких: $n^2=9$, 16, 25, 49, 64; когда плоскость по Теореме 1 благополучно существует)*).

Как уже известно читателю, это еще не доказывает неразрешимости головоломки Эйлера (см., например, задачу 3). Однако она действительно неразрешима! Это было доказано в 1900 году скрупулезным перебором всех возможных вариантов построения каре.

Трудная Теорема 2 была доказана сравнительно недавно (1949 год); она позволяет исключить из рассмотрения бесконечно много чисел, например числа 77 и 78. На рисунке 6 приведены первые сто натуральных чисел, раскрашенные в три цвета: синие — это те числа, для которых по Теореме 1 существует плоскость соответствующего порядка, красные — числа, для которых по Теореме 2 такой плоскости не существует, а для черных чисел открыта пока как первая, так и вторая возможности.

Terra incognita *) черных чисел начинается с числа 10 (хотя $10=2\cdot4+2$, но $10=2\cdot5$, причем ни 2, ни 5 при делении на 4 не дают в остатке 3). С момента открытия конечных аффинных геометрий (начала XX века) было немало попыток построить плоскость такого порядка, в том числе и совсем недавних — с помощью самых современных вычислительных машин, но все они окончились неудачно: никому не удалось построить больше шести семейств параллельных прямых разыскиваемой плоскости, хотя по (A12) таких семейств должно быть ровно одиннадцать!

§ 5. Координатный метод

Пусть n — целое число, большее единицы. Мы попытаемся построить конечную аффинную плоскость порядка n, введя на нашем множестве координаты. Действуя так, мы подражаем великому примеру Рене Декарта, систематически сводившего именно геометрические задачи на евклидовой плоскости к соответствующим алгебраическим задачам.

Итак, расположим n^2 точек в виде квадрата $n\times n$ в узлах разграфленной в клетку бумаги, как это сделано на рисунке 7 для $n=5$. Перенумеруем вертикальные и горизонтальные ряды узлов целыми числами от 0 до $n-1$ и сопоставим каждой точке на будущей конечной плоскости пару координат (x, y), где y — это номер горизонтального, а x — номер вертикального из тех двух рядов, на пересечении которых лежит эта точка.

*) Заслуживает быть отмеченным удивительное, хотя и не столь уж редкое в истории математики совпадение: именно Эйлеру принадлежит термин «аффинный» (на латыни «affine» означает *смежный, соседний*; аффинная геометрия — это геометрия смежности, соседства, геометрия, лишенная расстояния, но сохранившая параллельность), и Эйлером же была сформулирована (пусть в «развлекательной» форме) первая проблема, имеющая прямое отношение к теории конечных аффинных плоскостей.

*) *Неведомая земля* (лат.).

Что же считать прямыми плоскости? Разумеется, любой горизонтальный или вертикальный ряд узлов. Кроме того, любой набор (не менее двух) узлов, лежащих на одной евклидовой прямой в пределах квадрата $n \times n$. Условимся только «возвращать» всякую такую прямую так, как это показано на рисунке 8.

Задача 6. Докажите, что после некоторого числа таких «скачков» мы вновь попадем на исходную прямую и что число узлов, через которые мы при этом «пройдем», не превосходит n.

Набор «пройденных» нами вдоль одной «скачущей» прямой узлов мы и будем считать прямой.

Эта идея действительно позволяет построить плоскость порядка n, когда n — простое число. Мы рассмотрим арифметический вариант такого определения плоскости, оставив читателю аккуратное проведение намеченной нами геометрической конструкции.

Задача 7. Покажите, что если n — произвольное натуральное число (не обязательно простое), то таким способом можно определить $\varphi(n)+1$ семейств параллельных прямых, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера (!) ($\varphi(n)$ = количеству натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n).

Итак, пусть $n=p$ — простое число. Очевидно, что для любого целого числа m найдется единственное число из набора чисел $F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, равное остатку от деления m на p; обозначим это число через $\{m\}_p$. Теперь для любых двух чисел a и b из набора F_p мы определим две операции: *p-сложение* и *p-умножение*, *положив*:

$$a \oplus_p b = \{a+b\}_p, \quad a \otimes_p b = \{a \cdot b\}_p,$$

где $a+b$ и $a \cdot b$ — обычные сумма и произведение чисел a и b. Очевидно, что для любых двух чисел a и b из набора F_p *p-сумма* и *p-произведение* снова принадлежат F_p. Столь же очевидны простые свойства этих операций, сформулированные ниже в Теоремах П1—П9 (пожалуй, лишь Теорема П8 потруднее остальных).

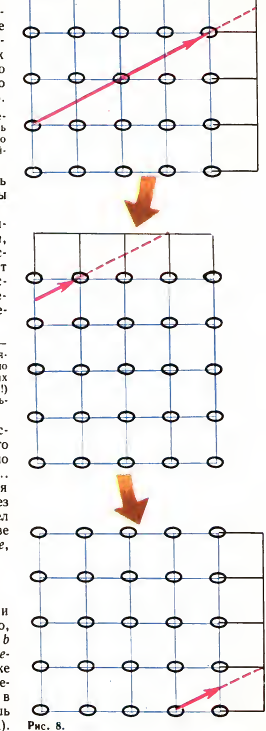


Рис. 8.

Трудолюбивому читателю следует воспринимать их как упражнения.

Теорема П1. (*Свойство нуля.*) $a \oplus_p 0 = 0 \oplus_p a = a$ *для любого* $a \in F_p$.

Теорема П2. (*Свойство единицы.*) $a \otimes_p 1 = 1 \otimes_p a = a$ *для любого* $a \in F_p$.

Теорема П3. (*Ассоциативность сложения.*) $(a \oplus_p b) \oplus_p c = a \oplus_p (b \oplus_p c)$ *для любых* $a, b, c \in F_p$.

Теорема П4. (*Ассоциативность умножения.*) $(a \otimes_p b) \otimes_p c = a \otimes_p (b \otimes_p c)$ *для любых* $a, b, c \in F_p$.

Теорема П5. (*Коммутативность сложения.*) *Для любых* $a, b \in F_p$ $a \oplus_p b = b \oplus_p a$.

Теорема П6. (*Коммутативность умножения.*) *Для любых* $a, b \in F_p$ $a \otimes_p b = b \otimes_p a$.

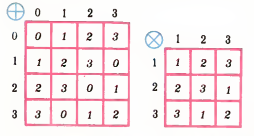
Теорема П7. (*Обратимость сложения.*) *Для любых двух элементов* a *и* b *из* F_p *существует единственный элемент* $c \in F_p$, *для которого* $a \oplus_p c = b$.

Теорема П8. (*Обратимость умножения.*) *Для любого* $a \in F_p$, *не равного нулю, и любого* $b \in F_p$ *существует единственный элемент* c, *для которого* $a \otimes_p c = b$.

Теорема П9. (*Дистрибутивный, или распределительный закон.*) *Для любых трех элементов* a, b, c *из* F_p

$$a \otimes_p (b \oplus_p c) = (a \otimes_p b) \oplus_p (a \otimes_p c).$$

Используя множество F_p и введенные на нем операции, мы определим теперь конечную аффинную плоскость порядка p. Точками этой плоскости будем называть пары чисел (x, y), где $x, y \in F_p$; всего имеется p^2 таких пар. Прямой этой плоскости будем называть любое множество таких пар, координаты которых удовлетворяют либо некоторому уравнению вида $x = s$, где s — элемент набора F_p, либо уравнению вида $y = a \otimes_p x \oplus_p b$, где оба числа a, b принадлежат набору F_p.



$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\otimes$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Рис. 9. Таблица сложения и умножения конечного поля из четырех элементов.

Мы предоставляем читателю проверку справедливости аксиом А1—А3 при таком определении точек и прямых. (Для доказательства утверждения, эквивалентного, например, (А1), нужно показать, что любые две точки $A = (c, d)$ и $B = (e, f)$ могут удовлетворять только одному уравнению либо вида $x = s$, либо вида $y = a \otimes_p x \oplus_p b$; при проверке следует воспользоваться свойствами операций $\oplus_p$ и $\otimes_p$, сформулированными в Теоремах П1—П9.) Тем самым будет завершено доказательство той части Теоремы 1, в которой идет речь о простых значениях порядка n плоскости.

Полезно понимать, что для нашего построения была существенна не арифметическая природа чисел из набора F_p и даже не простота числа p, а только те свойства элементов набора, которые описываются Теоремами П1—П9. Мы могли рассмотреть произвольное конечное множество F, лишь бы в нем были определены: а) две операции, первую из которых мы будем называть *сложением*, а вторую *умножением*, б) два особых элемента, первый из которых мы будем называть (и обозначать) *нулем*, а второй — *единицей*, и, наконец, лишь бы эти операции и эти два выделенных элемента удовлетворяли требованиям Теорем П1—П9.

Множество F *с такими свойствами называют конечным полем.*

Вот пример конечного поля с 4 элементами: $F_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, операции которого определены согласно таблицам рисунка 9. Соответствующая конечная аффинная плоскость порядка 4 с «красно-зеленой» координатной сеткой изображе-

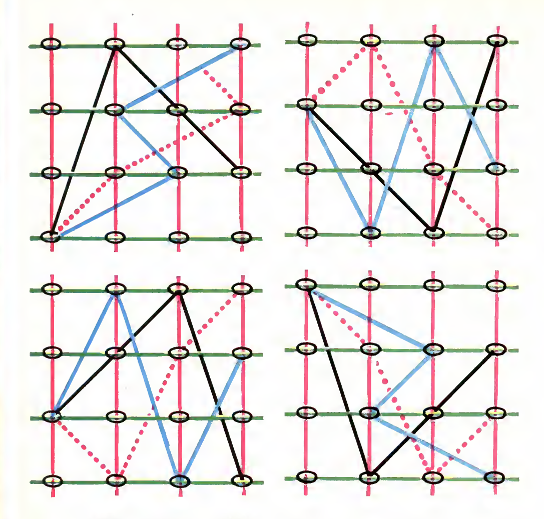


Рис. 10. Каждому семейству параллельных отвечает свой цвет: для трех семейств (синего, черного, пунктирного) на каждом рисунке изображено по одной прямой.

на на рисунке 10. Одновременно этот рисунок служит решением уже упомянутой (эпиграф к § 2) задачи о 16 космонавтах: каждое семейство параллельных прямых — это разделение 16 космонавтов на 4 экипажа, каждая прямая такого семейства — один экипаж.

Приведем без доказательства основную теорему о конечных полях.

Теорема. *Число q элементов любого конечного поля есть степень простого числа $q=p^m$. Наоборот, для любого $q=p^m$, где p — простое число, а m — произвольное натуральное, найдется единственное конечное поле F_q с q элементами* *).

Из справедливости этой теоремы и вытекает существование конечной аффинной плоскости порядка $q=p^m$.

*) Доказательство этой теоремы можно найти например, в классической книге ван-дер Вардена «Современная алгебра», т. 1, с. 153 (Гостехиздат, 1947). Единственность поля нужно понимать в том смысле, что любое другое поле с тем же числом элементов *изоморфно* полю F_q: между элементами этих двух полей можно установить такое взаимно однозначное соответствие, чтобы нуль соответствовал нулю, единица — единице, сумма — сумме и произведение — произведению.

§ 6. Эпилог

В отличие от романа или пьесы преждевременное раскрытие замысла не является недостатком научного исследования.

Дж. Гэлбрейт

Итак, вопрос о существовании конечных аффинных плоскостей данного порядка несколько прояснился: есть запрещенные значения (красные числа на рис. 6), есть неисследованные значения (черные числа там же) и есть разрешенные значения — простые числа и их степени (синие числа), для которых существует способ построения плоскости.

Но вот единственный ли этот способ?! Нет ли каких-либо других плоскостей для данного порядка $q=p^m$?

В самом деле, Теорема о конечных полях (§ 5) запрещает существование полей, отличных от некоторых стандартных полей F_q (их называют в честь Эвариста Галуа *полями Галуа*): с простейшими из этих полей— полями F_p — вы на самом деле уже встречались на страницах «Кванта»— в статье А. Бельского и Л. Садовского «Кольца» («Квант», 1974, № 2 — см. задачи 2 и 3 на с. 7. этого номера), но не препятствует существованию плоскостей того же порядка $q=p^m$, отличных от стандартных. Удалось показать, что все плоскости, чей порядок не превосходит числа 8, могут быть лишь стандартными, и построить нестандартную плоскость порядка 9.

Прощаясь с читателем, автор трактата горячо рекомендует ему прочесть две замечательные книги Э. Артина и М. Холла*), где предмет трактата освещен одинаково интересно, хотя и с разных сторон.

*) Э. Артин, Геометрическая алгебра. Издательство «Наука», Москва, 1969. М. Холл, Комбинаторика. Издательство «Мир», Москва, 1970.

Удивительные числа

Напишите четыре трехзначных числа:

360, 351, 362, 402.

Возьмите теперь любое число января, например, 15/I, прибавьте к числу 15 первую цифру из написанных — 3, и сумму 15+3 разделите на 7 (число дней недели): (15+3) : 7. В остатке вы получите 4 —15/I—76 приходится на 4-й день недели, т. е. на четверг.

Если взять какое-нибудь число февраля, например 15, и прибавить вторую цифру из ряда трехзначных чисел, разделить на 7, то в остатке получится 0, что указывает, что 15 февраля приходится на воскресенье.

Если взять 7/IV, то по этому правилу к 7 придется прибавить 3, тогда получим (7+3) : 7 — в остатке 3, значит, 7/IV будет третьим днем недели, т. е. средой.

Словом, записанный ряд трехзначных чисел — это 12 постоянных слагаемых (записанных поквартально) для всех двенадцати месяцев 1976 года, с помощью которых можно быстро определить день недели любой даты года по очень простому правилу:

Интересующее вас число + постоянное слагаемое данного месяца : 7 = частное и остаток — ответ.

Попробуйте по календарю на 1976 года определить, откуда взялись эти 12 цифр, и составить такие 12 цифр для 1977 года.

П. Сорокин (Астрахань)







ТЕМПЕРАТУРА, ТЕПЛОТА, ТЕРМОМЕТР

Температура — одна из тех не очень многих физических величин, о которых человек узнает не только до того, как начнет изучать физику, но и до того, как научится грамоте. Уже в раннем детстве мы узнаем, что словам горячее, теплое, холодное, отражающим наши ощущения, соответствуют различные значения температуры. Мы слышим о том, что летом температура высокая, а зимой низкая, что у здорового человека температура тела 36,6 градуса, а если она выше, то нужно вызывать врача...

Из-за привычности понятия температуры мы обычно не отдаем себе отчета в том, насколько эта величина своеобразна, насколько она отличается от других привычных величин, таких как длина, масса, объем. А различие здесь очень существенное. Состоит оно вот в чем.

Если соединить десять стержней длиной в 1 *м* каждый, приставив их один к другому, то получится стержень длиной в 10 *м*. Десять масс в 1 *кг* каждая в сумме дадут массу в 10 *кг* и т. д. Но если соединить десять тел, каждое из которых имеет температуру 20 градусов, то мы получим тело, температура которого 20 градусов, а не 200. Температуры тел при их соединении не складываются, как складываются их длины, объемы, массы и т. д. Длина в 100 *м* — это сумма ста длин в 1 *м*, но температура в 100 градусов — это не сумма ста температур в 1 градус каждая, подобно тому, как человек в возрасте 15 лет — это не то же самое, что 15 годовалых детей! Температура, как говорят, величина не аддитивная. В этом — одна из важнейших особенностей этой величины.

С этой особенностью связан и способ измерения температуры. Чтобы измерить длину тела, нужно сравнить его с другим телом, длина которого принята за единицу. Определить массу тела — значит сравнить ее с другой массой, принятой за единицу. Ведь и длина, и масса тела равны соответственно сумме длин и масс его частей.

Но температуру так измерить нельзя. Но это значит, что сама величина температуры вообще не может быть измерена, раз ее нельзя сравнивать с эталоном температуры. Каким же образом температуру все-таки измеряют?

Немного истории

Прибор для измерения температуры — термометр — впервые был изобретен Галилеем около 1592 года (само слово «термометр» впервые встречается в литературе в 1624 году). Способ

измерения температуры, предложенный Галилеем, принципиально не отличается от того, которым пользуются и в наше время.

Схема придуманного им прибора показана на рисунке 1.

Небольшой стеклянный баллон (*a*) припаян к тонкой длинной трубке (*b*) с открытым концом. Баллон нагревают руками и погружают нижний конец трубки в сосуд с водой (*c*). По мере того как баллон охлаждается до температуры окружающего воздуха, уровень воды в трубке поднимается над уровнем воды в сосуде.

Рис. 1.

Легко понять, что в приборе Галилея используется тот факт, что объем газа в баллоне с трубкой зависит от температуры. Поэтому по изменению объема газа можно судить и об изменении температуры.

Конечно, описанный прибор еще не термометр. По нему нельзя отсчитывать числовое значение температуры. Поэтому его следует называть не термометром, а термоскопом. Но если термоскоп тем или иным способом снабдить шкалой, то он станет термометром. На решение этой задачи потребовалось почти 150 лет. Пока для нас важно, что уже в приборе Галилея содержится принцип измерения температуры, и принцип этот не пришлось изменять вплоть до наших дней: температура непосредственно не измеряется. Измеряется величина, *зависящая* от температуры. В термоскопе Галилея такой величиной был объем газа. В современном ртутном термометре величиной, зависящей от температуры, по изменению которой судят об изменении температуры, тоже является объем, но не газа, а ртути. Наряду с объемом газа такой величиной может быть давление газа (при постоянном объеме), длина твердого стержня, электрическое сопротивление проводника и т. д.

Закон природы, который нельзя открыть без термометра

Уже первые несовершенные термометры и даже термоскопы позволили открыть один из важнейших законов природы — закон теплового равновесия. Закон этот многим кажется и казался настолько очевидным, что на его открытие не претендует ни один ученый и никто не может указать даты его открытия. Состоит этот закон в том, что любая изолированная группа (система) тел сама собой с течением времени приходит в состояние, при котором температуры всех тел системы одинаковы. Такое состояние и называется состоянием теплового равновесия.

Ясно, что закон теплового равновесия мог быть открыт только после изобретения термометра. С другой стороны, само измерение температуры с помощью термометра основано на законе теплового равновесия. Ведь термометр тоже тело, имеющее определенную температуру. И он измеряет именно собственную температуру. А если мы хотим с его помощью измерить температуру какого-то другого тела, оно должно быть в тепловом равновесии с термометром, потому что в этом случае температуры тела и термометра одинаковы. Вот почему при измерении температуры тела с помощью термометра всегда приходится ждать некоторое время — ждать установления теплового равновесия между телом и термометром.

Еще немного истории

Итак, термоскоп появился в конце XVI века. Термометром он стал при-

мерно в середине XVIII века. Но что именно измеряет термометр? Что такое температура? Правильный ответ на этот вопрос был дан еще через сто лет после того, как появился термометр.

Температура — величина, которая характеризует тепловое состояние тела. О холодных и горячих телах мы говорим, что у них разная температура. Следовательно, вопрос о том, что такое температура, сводится к вопросу: чем отличается холодное тело от горячего?

Первый ответ на этот вопрос дал сам Галилей. Из того легко наблюдаемого факта, что когда вблизи горячего тела находится холодное, то горячее тело охлаждается, а холодное нагревается, Галилей сделал естественный вывод, что от горячего тела к холодному что-то переходит (с таким же правом можно было считать, что что-то переходит от холодного тела к горячему!). Галилей считал, что это «что-то» есть особое тепловое вещество. И большинство исследователей XVII—XVIII веков придерживались такой же точки зрения и называли это вещество теплородом.

Согласно теории, основанной на представлении о теплороде, горячее тело отличается от холодного тем, что в нем больше теплорода, чем в холодном. Установление теплового равновесия по этим представлениям состоит в том, что теплород переходит от горячего тела к холодному. Значит, всякое тело состоит как бы из двух веществ — вещества самого тела (вода, медь, железо, стекло) и теплорода. Каждое тело — это смесь вещества тела и вещества теплоты (теплорода). Слово температура как раз и означает смесь. И в течение почти полутораста лет считалось, что измеряя температуру, мы измеряем *концентрацию* теплорода в теле. Отсюда и название единицы температуры — *градус*. Именно в таких единицах измеряли, например, концентрацию водных растворов.

Такой взгляд на температуру держался очень долго — до конца XVIII века. Так и говорили — градусы теплоты.

Но одновременно с «вещественной» теорией теплоты существовала и другая теория, одним из создателей и поборников которой был великий русский ученый М. В. Ломоносов. Эта теория основывалась на том факте, что нагревание тела может быть вызвано движением. Ломоносов писал: «Очень хорошо известно, что теплота возбуждается движением: от взаимного трения руки согреваются, дерево загорается пламенем; при ударе кремня об огниво появляются искры; железо накаливается от проковывания частыми и сильными ударами...» Отсюда делался вывод, что теплота — это не вещество, а движение маленьких частиц, из которых состоят все тела («нечувствительных частиц», как их тогда называли).

Свыше двухсот лет шла борьба между этими двумя теориями. В течение долгого времени господствовала первая теория, но в конце концов победу одержала вторая.

Уже в XVIII веке были выполнены опыты, которые заставили многих физиков пересмотреть представление о том, что температура — это концентрация теплоты (теплорода) в теле.

В 1760 году английский физик и врач Блек показал, что одно и то же количество теплоты, подведенное к равным массам различных веществ, приводит к различным изменениям температуры. Но если бы температура действительно представляла концентрацию теплоты в теле, то получение одного и того же количества теплоты должно было бы вызывать у равных масс любых веществ одно и то же *изменение* температуры. В этих опытах Блек открыл, как мы теперь знаем, что у разных веществ различная теплоемкость. Но с теорией теплорода это несовместимо.

В 1764 году тот же Блек показал, что при плавлении льда им поглощает-

ся значительное количество теплоты, но температура его при этом остается неизменной. Эту теплоту со времен Блека часто называют скрытой теплотой плавления. Точно так же, при отвердевании воды выделяется теплота и опять — без изменения температуры. Ясно, что если температура — это концентрация теплоты в теле, то невозможно поглощение теплоты без повышения температуры и невозможна потеря теплоты телом без понижения его температуры.

Что же в действительности представляет собой температура — величина, смысл которой так долго оставался непонятным?

Это стало ясным лишь после того, как появилась кинетическая теория строения вещества. И мы поймем смысл температуры из сопоставления двух как будто бы совсем разных вещей — одного из результатов кинетической теории и способа измерения температуры.

О молекулярном хаосе и о его законах

Основой кинетической теории строения вещества является утверждение о том, что всякое вещество состоит из маленьких частиц — молекул, непрерывно и беспорядочно движущихся. Между молекулами действуют сложные силы притяжения и отталкивания. Но в газах при обычных давлениях эти силы малы. И можно представить себе газ, в котором силы взаимодействия между молекулами вообще отсутствуют. Так как такой газ можно себе лишь представить, то он получил название идеального газа.

Идеальный газ — это скопление огромного числа молекул, беспорядочно движущихся по всем направлениям со скоростями в сотни метров в секунду, то и дело сталкивающихся между собой и со стенками сосуда. В этом невообразимом хаосе (возможно, что само слово газ произошло от древнего слова хаос) действуют, однако, строгие и нерушимые законы. Благодаря тому, что в идеальном газе не надо учитывать сил взаимодействия между молекулами, эти законы можно установить теоретически. В частности, можно, пользуясь законами механики, *вычислить* давление газа, то есть силу, с которой газ действует на единицу площади стенки сосуда. Сила эта есть результат ударов движущихся молекул о стенки.

Расчет показывает, что если в сосуде объемом V находится N молекул газа, то давление, оказываемое газом на стенки сосуда, равно

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\overline{E}, \qquad (1)$$

где $\overline{E} = \frac{m\overline{v^2}}{2}$ — кинетическая энергия хаотического движения, приходящаяся в среднем на 1 молекулу газа. Формула (1) показывает, что давление газа равно $^2/_3$ средней кинетической энергии хаотического движения молекул, содержащихся в единице объема (ведь $\frac{N}{V}$ — это как раз и есть число молекул в единице объема).

Для реальных газов расчет давления довольно сложный, но при определенных условиях формула (1) достаточно точна. Она тем точнее, чем меньше величины N/V и $\overline{E}$. Практически этой формулой можно пользоваться при давлениях около 1 *атм* и меньше.

Но какое отношение все это имеет к температуре? Ведь в формулу (1) температура не входит!

Чтобы это понять, вернемся к незаконченному нами рассмотрению способа измерения температуры.

О температурных шкалах

Первыми термометрами, которыми практически пользовались, были жидкостные термометры, изготовлявшиеся группой флорентийских ученых. Вслед за ними их стали конструировать и изготовлять и в дру-



гих страиах. В иих использовались различиые жидкости, ио главиым образом — спирт и ртуть (иногда масло).

Жидкостиые термометры представляли собой тоикие стеклянные трубки, закаичивавшиеся виизу иебольшим шариком или цилиидром. Шарик и иижияя часть трубки заполиялись жидкостью (спиртом, ртутью, маслом). На второй страиице обложки вы видите образцы флореитийских термометров. (Не правда ли, это ие только приборы, ио и, своего рода, произведеиия искусства. Вообще, стариииые приборы изготовлялись с «художествеииым подходом».)

Что касается термометрических шкал, то использовались самые различные способы их построеиия. Каждый коиструктор и изготовитель термометров придумывал и способ создаиия шкалы к иим. К коицу XVIII века в ходу было около двух десятков различиых термометрических шкал, из которых до иаших дией сохраиились три (что тоже слишком миого).

В коице коицов восторжествовал прииципп построеиия термометрических шкал, предложеииый голлаидским стеклодувом и физиком-любителем Фареигейтом и шведским астроиомом Цельсием. Прииципп осиоваи иа использоваиии двух так иазываемых рeпериых точек, то есть тепловых состояиий, отличающихся своим постояиством. Такими точка-

ми были температуры таяния льда и кипения воды при атмосферном давлении. (Температура плавления любого твердого вещества и температура кипения любой жидкости при данном давлении также постоянны, но вода и лед наиболее доступны.)

В 1742 году Цельсий предложил такой способ градуировки, т. е. создания шкалы термометров (рис. 2). Термометр, каков бы он ни был, приводится в контакт с тающим льдом и после установления теплового равновесия уровень жидкости в термометре (если это жидкостный термометр) отмечается некоторым числом. Затем тающий лед заменяется кипящей водой, и новый уровень жидкости в термометре отмечается числом, которое отличается от первого на 100. А разность уровней делится на 100 равных частей — градусов. Сейчас кажется курьезом, что Цельсий отмечал уровень жидкости в термометре при температуре кипения воды цифрой нуль, а уровень ее при температуре тающего льда — числом 100. Впрочем, через 8 лет, в 1750 году, шкала была перевернута, и в таком виде ею пользуются и теперь.

Еще до Цельсия, в 1724 году, Фаренгейт, тоже используя в качестве реперных точек температуры тающего льда и кипящей воды, изготовлял термометры, в которых температура тающего льда отмечалась числом 32, а температура кипящей воды — числом 212, так что интервал температур тающий лед — кипящая вода оказывался разделенным не на 100, а на 180 равных частей — градусов. Французский ученый Реомюр, подобно Цельсию, приписывал температуре тающего льда значение 0, но по термометру Реомюра вода кипит при температуре 80 градусов.

Как видим, в построении термометрических шкал был немалый произвол. Произвольным было число градусов, на которые делился

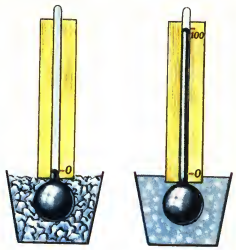


Рис. 2.

интервал температур между реперными точками. Произвольными были и значения температур самих реперных точек. Ведь нет разумных оснований считать, что температура тающего льда равна нулю, то есть что тающий лед не имеет никакой температуры!

Для нас здесь важно, что разделяя интервал температур между точками таяния льда и кипения воды на *равные* части (на 100, 80 или 180), мы тем самым полагаем заранее, что объем жидкости, которой заполнен термометр, *строго линейно* зависит от температуры. Если обозначить объем жидкости при температуре тающего льда через V_0, объем той же жидкости при температуре кипящей воды через V, а сами эти температуры через t_0 и t, то деление интервала температур на равные части означает, что

$$\frac{V - V_0}{t - t_0} = c,$$

где c — постоянная величина. Если принять, что $t_0 = 0$, то $V - V_0 = ct$, и

$$V = V_0 + ct.$$

Можно ли проверить, что объем в самом деле линейно зависит от температуры? Очевидно, нет. Ведь для опытной проверки необходимо

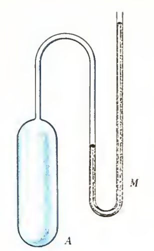


Рис. 3.

пользоваться термометром. Но при устройстве термометра заранее было предположено, что объем пропорционален температуре. Поэтому опыт ничего другого дать не может.

Существует старый анекдот. В одном морском порту ежедневно ровно в полдень стреляла пушка. Капитаны кораблей, покидая порт, проверяли по пушечному выстрелу свои судовые хронометры, при помощи которых определяют географическую долготу. Один из капитанов пожелал узнать, насколько можно быть уверенным в том, что пушка стреляет действительно в полдень. И выяснилось, что артиллерист определяет время по «очень точным часам», имеющимся у местного часовщика. А часовщик сказал капитану, что он проверяет свои «очень точные часы»... по выстрелу портовой пушки. Ясно, что при таких условиях нельзя судить ни о достоинствах часов, ни о том, действительно ли ровно в полдень раздается пушечный выстрел. Таким же образом, пользуясь термометром, шкала которого создана в предположении, что объем жидкости пропорционален температуре, нельзя узнать, верно ли это предположение.

Для техники измерения температур важно, что термометры с различными жидкостями, а тем более термометры, в которых о температуре судят не по объему жидкости, а по каким-нибудь другим свойствам, дают при измерении одной и той же температуры не совпадающие показания, причем различие в показаниях не одинаково в разных температурных областях. В связи с этим возникла необходимость в каком-то стандартном термометре, по которому градуировались бы все термометры. Тогда их показания, конечно, будут совпадать. Как решается эта задача?

В настоящее время стандартным термометром служит так называемый газовый термометр постоянного объема. Об этом термометре и о новой шкале температур мы и расскажем.

Газовый термометр и абсолютная шкала температур

В газовом термометре в качестве величины, зависящей от температуры, по которой судят о самой температуре, принимается давление газа в закрытом сосуде, то есть при постоянном объеме. Опыт показывает, что давление нагретого газа больше, чем давление холодного. Сам газовый термометр состоит из сосуда A, заполняемого «идеальным» газом (любым газом при малом давлении), и присоединенного к нему манометра M для измерения давления (рис. 3).

Если сосуд поместить в тающий лед, а затем в кипящую воду и измерить значения давлений при этих температурах, обеспечив тепловое равновесие, то окажется, что давление при температуре кипящей воды в 1,3661 раза больше, чем при температуре тающего льда. Если обозначить давление и температуру, соответствующие кипящей воде, через p и T, а значения этих величин, соответствующие тающему льду, через p_0 и T_0, то

$$\frac{p}{p_0} = 1{,}3661. \qquad (2)$$

Чтобы не порывать со ставшей за двести лет привычной стоградусной шкалой Цельсия, по-прежнему полагают, что

$$T - T_0 = 100. \qquad (3)$$

Разность давлений при температурах кипения воды и тающего льда делят на 100 *равных частей* — градусов. Это значит, что и теперь мы заранее полагаем, что температура линейно зависит от давления газа при постоянном объеме. Более того, мы можем считать, что температура газа прямо пропорциональна его давлению. Проверить это допущение, разумеется, нельзя по той же причине, по которой в приведенном выше анекдоте нельзя по пушечному выстрелу проверять правильность хода часов, а по часам — своевременность выстрела. Просто само измерение температуры основано на том, что давление газа и его температура считаются пропорциональными друг другу.

Приписывать температуре тающего льда значение нуль теперь нет необходимости. Ее можно просто вычислить. В самом деле, если температура газа прямо пропорциональна давлению, то отношение давлений газа при температурах кипящей воды и тающего льда равно отношению самих этих температур, то есть

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}. \qquad (4)$$

Но отношение, стоящее в левой части этого равенства, равно 1,3661. Следовательно, и правая часть равна этому числу:

$$\frac{T}{T_0} = 1{,}3661.$$

Отсюда получаем

$$T = 1{,}3661\,T_0.$$

Подставив это значение для T в равенство (3), находим

$$1{,}3661\,T_0 - T_0 = 100,$$

и мы сразу получаем

$$T_0 = \frac{100}{0{,}3661} \approx 273{,}15.$$

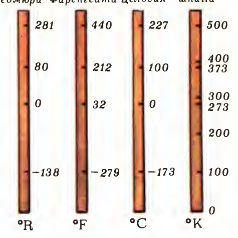


Рис. 4.

Этим и отличается новая шкала от старой шкалы Цельсия: температура таяния льда по этой шкале равна не нулю, а 273,15 градуса. А нуль температуры на 273,15 (для краткости на 273) градуса ниже температуры таяния льда. Это, как говорят, абсолютный нуль. Это — та температура, при которой давление идеального газа стало бы равным нулю, если бы такая температура была достигнута и если бы газ еще оставался при этой температуре газом. Так как давление газа не может быть меньше чем нуль, то температура на такой шкале отрицательной (меньше нуля) быть не может.

Описанная только что температурная шкала (некоторые тонкости в ее определении, практически несущественные, мы опускаем) носит название абсолютной шкалы температур или шкалы Кельвина. И сама температура, отсчитываемая по этой шкале, называется абсолютной температурой. Обозначается она буквой T и выражается в градусах Кельвина (сокращенно °K), так что температура таяния льда равна 273,15°K, температура кипения воды равна 373,15°K и т. д.

Но шкалой Цельсия тоже пользуются на практике. Температуру,

отсчитываемую по этой шкале, обозначают буквой t и выражают в градусах Цельсия (сокращенно °С). По этой шкале температура таяния льда равна 0°С, температура кипения воды равна 100°С и т. д. Ясно, что

$$t\ ^\circ\mathrm{C} = (T - 273{,}15)^\circ\mathrm{K}.$$

В физике почти всегда пользуются шкалой Кельвина.

Теперь нам будет нетрудно выяснить, в чем же состоит истинный смысл температуры.

Что же такое температура?

Итак, по принятому теперь способу измерения температуры давление p произвольной массы газа M, то есть произвольного числа N молекул газа, в сосуде объемом V пропорционально его абсолютной температуре T.

Это видно из уравнения (4), которое можно переписать в виде

$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0}. \qquad (5)$$

Соотношение (5) показывает, что при постоянном объеме отношение давления газа к его абсолютной температуре — постоянная величина. С другой стороны, давление газа, как мы видели, определяется формулой (см. (1))

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\overline{E}.$$

Подставив это значение p в выражение (5), получаем

$$T = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{T_0}{p_0}\overline{E}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) относится к газу в закрытом сосуде постоянного объема. Поэтому число N молекул газа сохраняет постоянное значение; отношение $\frac{T_0}{p_0}$, как мы видели, тоже постоянно. Следовательно, коэффициент при $\overline{E}$ в формуле (6) — постоянная величина для любого газа, то есть

$$T = \frac{2}{3}A\overline{E}, \qquad (7)$$

где $A = \frac{N}{V}\frac{T_0}{p_0}$ — константа. Это означает, что абсолютная температура газа — это то же, что средняя кинетическая энергия хаотического движения одной его молекулы, только выраженная не в джоулях, а в градусах Кельвина. Коэффициент же $\frac{2}{3}A$ — это переводный множитель, показывающий, во сколько раз 1°К больше 1 *дж/молекулу*. Подобно этому, одну и ту же длину можно выразить в метрах и в дюймах. Необходимо только знать, что 1 *м*=40 *дюйм*. Коэффициент 40 — переводный множитель, показывающий, во сколько раз 1 *м* больше 1 *дюйм*.

Обычно формулу (7) записывают в виде

$$\overline{E} = \frac{3}{2}kT, \qquad (8)$$

где

$$k = \frac{1}{A} = \frac{V}{N}\frac{p_0}{T_0}. \qquad (9)$$

Коэффициент k называется постоянной Больцмана.

Из формулы (9) видно, как из опыта получить значение постоянной Больцмана. Для этого нужно наполнить сосуд известного объема V известной массой M газа (массу газа можно определить взвешиванием). Затем поместить сосуд в тающий лед (его температура T_0=273,15°К), измерить с помощью манометра давление p_0 газа. Зная массу M газа, легко определить значение N. Действительно, если молярная масса газа μ, то число молей газа равно $\frac{M}{\mu}$; а поскольку в каждом моле газа имеется N_A молекул (N_A — число Авогадро), то число молекул N в массе M газа равно $N = \frac{M}{\mu}N_A$. Итак, зная массу газа M, его молярную массу μ, объем сосуда V и давление газа p_0

при температуре T_0, можно определить значение постоянной Больцмана k.

Такого рода измерения (а также и многие другие) неоднократно проводились. Все они дают для постоянной Больцмана значение

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ дж/град.$$

Как мы видим, значение k очень малое. Это значит, что средняя кинетическая энергия беспорядочных движений одной молекулы, и определяющая то, что мы называем температурой, чрезвычайно мала. При температуре в 1°К средняя кинетическая энергия молекулы $\bar{E}$ равна

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \approx$$
$$\approx 2 \cdot 10^{-23}\ дж/молекулу.$$

Таково соотношение между градусом Кельвина и джоулем на молекулу.

В заключение нам остается еще выяснить, какова связь между температурой и теплотой — двумя понятиями, которые в течение веков считались чуть ли не синонимами.

Известно, что теплотой называется энергия тепловых беспорядочных движений, *передаваемая* от одного тела к другому (при теплопередаче). Ясно поэтому, что теплота не является величиной, характеризующей состояние тела. О ней нельзя сказать, что она содержится в теле. Температура же характеризует состояние тела, потому что она определяется средней кинетической энергией его молекул. Понятно, что между теплотой и температурой в сущности никакой связи нет. Можно только сказать, *что если два тела имеют различную температуру, то более высокой является температура того из них, которое передает теплоту другому.* Температура тела — это величина, которая определяет, будет ли данное тело отдавать теплоту другим телам или получать ее от них. Такое определение температуры в свое время дал Максвелл.

Нужна ли величина, которая называется температурой?

Температура как понятие и как физическая величина появилась в науке задолго до того, как можно было понять ее истинный смысл. Но теперь, когда он известен, стоит ли сохранять эту как будто бы архаическую величину? Не лучше ли всюду, где мы привыкли говорить о температуре, о градусах Кельвина, о градусах Цельсия, заменить их тем, что они есть в действительности — средней кинетической энергией частицы, и измерять ее в джоулях?

Но нетрудно видеть, что для отказа от температуры и от градусов нет оснований.

Во-первых, едва ли будет удобно, например, врачу считать пациента больным на том основании, что средняя кинетическая энергия его молекулы равна $6{,}64 \cdot 10^{-21}$ *дж*, вместо того, чтобы говорить о температуре в 38°С.

Во-вторых, замена градусов джоулями может породить и недоразумения. Ведь энергия, например, в 100 *дж*, вообще говоря, означает, что за ее счет может быть получена и работа в 100 *дж*. Между тем, если температура тела равна 100 *дж/молекулу* (для температуры — это фантастическое значение), то это вовсе не значит, что за ее счет можно получить такую же работу.

Упражнения

1. Каким числом выражается абсолютный нуль температуры на шкалах Фаренгейта и Реомюра?

2. Вычислить среднюю кинетическую энергию молекулы газа при температуре 1000°К.

3. При взрыве ядерной бомбы образуется газовый шар, температуру которого можно считать равной 20 миллионам градусов. Какова средняя кинетическая энергия частицы в этом шаре?

4. В атомной и ядерной физике принято выражать энергию частиц в особых единицах — электрон-вольтах (*эв*).

Выразить в электрон-вольтах среднюю кинетическую энергию молекулы газа при комнатной температуре.

5. Вычислить значение постоянной Больцмана, пользуясь градусами Фаренгейта.

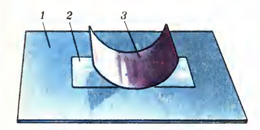


В. Майер

Беспокойная дуга

Этот красивый и несложный опыт принадлежит нашему выдающемуся соотечественнику изобретателю радио А. С. Попову.

Из латунного или жестяного листа толщиной около 1 *мм* вырежьте полоску размером примерно 30×100 *мм*. Полоску аккуратно обработайте напильником и шкуркой, сняв заусенцы с ее краев, и изогните ее так, чтобы получилась дуга радиусом 3—4 *см*. На пластинку алюминия или дюраля положите слюдяной листок толщиной не более 0,2 *мм*. Нужный по толщине листок нетрудно получить, расщепляя лезвием бритвы слюду, которую можно приобрести в хозяйственном магазине. На пламени сухого горючего или газовой горелки разогрейте изготовленную дугу и быстро поместите ее на листок слюды. При этом, даже если вы оставите дугу совершенно неподвижной, она начнет раскачиваться, и это колебательное движение может продолжаться несколько минут.



1 — алюминиевая пластинка, 2 — листок слюды, 3 — жестяная дуга.

Вот как объяснил результат этого интересного опыта сам А. С. Попов. «Причина движения проста: слюда, нагреваемая только с одной стороны, вспучивается в сторону нагретого тела и приподнимает его слегка, вследствие этого в прикосновение с нагретым телом приходят новые точки на поверхности слюды, а прежде нагретые остывают от соседства с холодным телом. Дуга наклоняется в одну сторону до тех пор, пока тяжесть не преодолеет образующейся таким образом движущей силы, тогда начинается движение в обратную сторону и т. д.».

Таким образом, в описанном опыте тепловая энергия нагретой дуги переходит в механическую энергию колебаний этой дуги. Это — типичный автоколебательный процесс, подробнее разобраться в особенностях которого мы предоставляем вам самим.

А теперь несколько экспериментальных заданий для самостоятельного исследования.

1. Выясните, является ли существенным наличие в опыте алюминиевой пластинки, обладающей хорошей теплопроводностью.
2. Какую дугу — широкую или узкую, толстую или тонкую — лучше использовать в опыте?
3. Получится ли опыт, если и латунная дуга, и алюминиевая пластинка будут нагреты до одной температуры? (Для того чтобы ответить на этот вопрос, вовсе не обязательно ставить соответствующий эксперимент).
4. Каким образом можно существенно увеличить продолжительность качаний дуги? Разработайте и проверьте в действии соответствующую установку.
5. Продумайте и поставьте опыт, аналогичный описанному, в котором нагретое тело совершало бы не колебательное, а вращательное движение.



А. Тоом

Решения задач ВЗМШ

В этом номере мы публикуем решения некоторых задач из вступительной работы в ВЗМШ 1976 года (см. «Квант» № 1, с. 68).

Задача 2. *Три прямые пересекаются в одной точке так, что каждые две из них образуют угол 60°. Точка М находится на расстоянии 3 см от одной прямой и на расстоянии 5 см — от другой. На каком расстоянии от третьей прямой может находиться точка М?*

Решение задачи основано на следующем факте, общем для всех точек плоскости. Для любой точки расстояние до одной из прямых, указанных в условии, равно сумме расстояний до двух других. Поэтому искомое расстояние может быть равно либо 5+ + 3 = 8 *см*, либо 5 — 3 = 2 *см*. Легко проверить, что оба эти значения действительно возможны.

Задача 3. *Какую цифру означает каждая из букв* М, И, Л, А, Н *в равенстве* НАЛИМ × 4 = = ЛИМАН?

Ясно, что Н⩽2, так как иначе число НАЛИМ × 4 было бы шестизначным. С другой стороны Н четно, как последняя цифра числа ЛИМАН, делящегося на 4. Поэтому Н=2. Отсюда следует, что А<5, иначе получим шестизначное произведение. Кроме того, А=1 или 3, поскольку А2— последние две цифры числа, делящегося на четыре. Рассмотрим два случая:

I. А=1. Последовательно получаем Л=8, И=7, М=5, что отбрасывается проверкой.

II. А=3, Л=9, И=5, М=8, что и дает ответ.

(В решении мы пользовались тем, что перенос из предыдущего разряда не может быть больше трех).

Задача 4. *Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая ломаная линия, состоящая из 7 звеньев?*

Звено ломаной не может пересечься с самим собой и своими соседями. Значит, каждое звено пересекается не более чем с четырьмя. Отсюда точек пересечения не больше чем $\frac{7\times 4}{2}=14$. На рисунке 1 показана ломаная, имеющая 14 точек самопересечения.

Задача 5. *Дедушка с внуком пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/час; под гору: дедушка — 8 км/час, внук — 20 км/час; в гору: дедушка —6 км/час, внук — 4 км/час. Оба проехали по одному и тому же маршруту.*

Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спус-

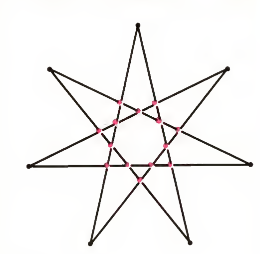


Рис. 1.

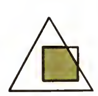
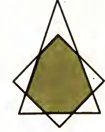
    

Рис. 2.

ков или подъемов на их пути, — если первым вернулся

а) внук,

б) дедушка?

Обозначим протяженность подъемов через x, а протяженность спусков через y. (Ровное место можно вообще не учитывать, так как на нем скорости деда и внука одинаковы.) Тогда время деда на подъемах и спусках равно $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}$, а время внука равно $\frac{x}{4}+\frac{y}{20}$. Пусть известно, какое из этих чисел меньше другого, что мы запишем так: $\frac{x}{6}+\frac{y}{8} \vee \frac{x}{4}+\frac{y}{20}$.

Преобразуя, получаем: $9y \vee 10x$. Если внук вернулся раньше, то $9y>10x$, откуда $y>x$. Если же дед вернулся раньше, то $9y<10x$, что возможно как при $y<x$, так и при $y>x$.

Задача 6. *Сколько сторон может иметь многоугольник, являющийся:*

а) пересечением;

б) объединением

треугольника и выпуклого четырехугольника? (Укажите все возможные значения и нарисуйте примеры.)

а) На рисунке 2 показано, как при пересечении могут получиться многоугольники с 3, 4, 5, 6, 7 сторонами. Больше семи сторон получиться не может, так как все стороны пересечения лежат на сторонах пересекающихся фигур, причем на разных, а их всего семь.

б) На рисунке 3 показано, как при объединении могут получиться многоугольники с числом сторон от трех

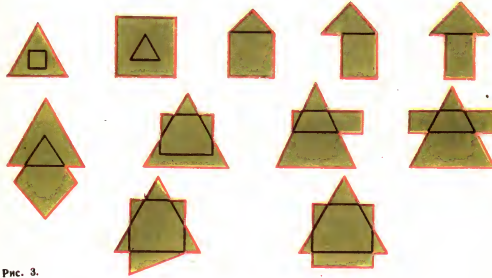


Рис. 3.

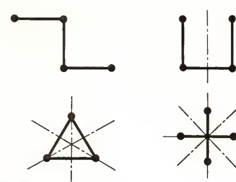


Рис. 4.

до тринадцати. Больше тринадцати вершин объединение иметь не может, потому что каждая вершина объединения — это

1) либо вершина одной из объединяемых фигур, а их всего семь;

2) либо точка пересечения их сторон, а их не более чем по две на каждой стороне треугольника.

З а д а ч а 7. *На плоскости нарисованы три конгруэнтных отрезка. Сколько осей симметрии может иметь это множество (объединение данных трех отрезков)?*

На рисунке 4 показаны множества, имеющие 0,1, 2, 3, 4, 6 осей симметрии соответственно. Докажем, что иного числа осей симметрии фигура иметь не может.

Убедитесь самостоятельно, что если несовпадающих отрезков меньше трех, то осей симметрии не больше четырех.

Пусть наше множество состоит из трех несовпадающих отрезков. Легко понять, что симметрия фигуры переводит один из отрезков в себя. Для каждого отрезка есть лишь две симметрии, переводящие его в себя (их осями служат прямая, на которой лежит отрезок, и его серединный перпендикуляр). Значит, всего осей симметрии не более шести.

Остается доказать, что не может быть пяти осей симметрии. Для этого мы воспользуемся следующим фактом. Если прямые I и II являются осями симметрии фигуры Φ, то прямая III, симметричная прямой II относительно прямой I, тоже является осью симметрии для Φ. (См. рис. 5, на котором показано, как получить точку A_4, симметричную A_1 относительно III.) Пусть осей симметрии пять. Тогда множество осей включает прямую I, содержащую некоторый отрезок, и серединный перпендикуляр к нему — иначе осей было бы меньше четырех. Но тогда осей — четное число; можно объединить в пары оси, симметричные относительно I, а осей, перпендикулярных I, кроме оси II, нет — иначе их было бы бесконечное число (см. рис. 6).

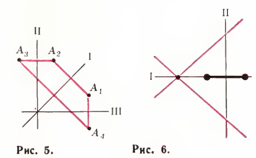


Рис. 5.

Рис. 6.



ПИРАМИДА ИЗ ДОМИНО

Расположите комплект домино (28 косточек) в виде пирамиды (см. рисунок), соблюдая следующие условия.

1. В каждой строке сумма очков на косточках должна быть точным квадратом.

2. В строках косточки укладываются согласно правилам игры в домино: 0 к 0, 1 к 1 и т. д.

Л. Мочалов

задачник кванта

Задачи

М386—М390; Ф398—Ф402

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 1 августа 1976 г. по адресу: 113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М386, М387» или «...Ф398». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты ваших решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Задачник «Кванта» в этом номере составлен из задач, предлагавшихся в этом году на Московских олимпиадах по математике и физике.

М386. Квадратная комната разгорожена перегородками, параллельными стенам, на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты — целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.

С. Фомин

М387*. Существует ли такое натуральное число, что если приписать его само к себе справа, то получится точный квадрат?

Б. Кукушкин

М388 а) На плоскости отмечено конечное число точек. Докажите, что среди них найдется точка, у которой не более трех ближайших (то есть, находящихся от нее на наименьшем расстоянии; таких точек, вообще говоря, может быть несколько).

б) Существует ли на плоскости конечное множество точек, у каждой из которых в этом множестве ровно три ближайших?

А. Карабегов

М389. Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги разбить на «доминошки» (каждая доминошка покрывает две соседние клетки) так, чтобы каждая прямая, идущая по линии сетки, разрезала пополам лишь конечное число доминошек?

С. Фомин

М390*. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n, для которых сумма цифр числа 2^n больше суммы цифр числа 2^{n+1}.

С. Конягин

Ф398. При подключении в сеть трехламповой люстры с двумя выключателями была допущена ошибка. В результате этого при замыкании одного из выключателей все три лампы горели неполным накалом. При замыкании другого выключателя горела нормально только одна из ламп (две другие не горели), и тот же эффект давало замыкание обоих выключателей одновременно. При разомкнутых выключателях все три лампы не

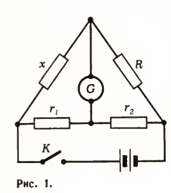


Рис. 1.

горели. Нарисуйте возможную схему выполненного монтажа, объясните наблюдаемые эффекты. (8 класс)

Ф399. Три небольших одинаковых металлических шарика, находящихся в вакууме, помещены в вершинах равностороннего треугольника. Шарики поочередно по одному разу соединяют с удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике оказывается заряд Q_1, а на втором — Q_2. Определить заряд третьего шарика. (9 класс)

Ф400. Две заряженные частицы имели первоначально одинаковые по величине и направлению скорости. После того как на некоторое время было включено однородное электростатическое поле, вектор скорости одной из частиц повернулся на 60°, а численное значение скорости уменьшилось вдвое. Вектор скорости другой частицы повернулся на 90°. Во сколько раз изменилось численное значение скорости второй частицы? Определите отношение заряда к массе для второй частицы, если для первой частицы оно равно k_1. (9 класс)

Ф401. Схему, изображенную на рисунке 1 (мостик Уитстона), применяют обычно для измерения неизвестного сопротивления x. Как, используя подобную схему, измерить сопротивление R_G самого гальванометра G, если второго гальванометра нет? (10 класс)

Ф402. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F = -0{,}6$ *м* расположена так, что один из ее фокусов совпадает с полюсом вогнутого зеркала. Каково фокусное расстояние F_1 зеркала, если известно, что система дает действительное изображение предмета, помещенного на любом расстоянии перед линзой? Изображение создается лучами, вторично прошедшими через линзу после отражения от зеркала. (10 класс)

Решения задач

М343—М350; Ф353—Ф357

М343. *В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км и из любого города в любой можно попасть, проехав по дорогам*

Будем обозначать города буквами A, B, C, D,... Прежде всего заметим, что: 1) если какой-то путь A —...— B — ... — C — ... — кратчайший между городами A и C, то часть его, например, от A до B — кратчайший путь между соответствующими городами; 2) кратчайший путь не проходит по одной дороге дважды.

менее 500 км. Когда одну дорогу закрыли на ремонт, выяснилось, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам. Докажите, что это можно сделать, проехав не более 1500 км.

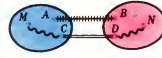


Рис. 1.

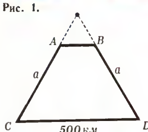


Рис. 2.

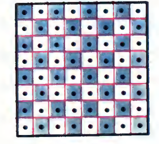


Рис. 3.

Допустим теперь, что закрыли дорогу, соединяющую города A и B; обозначим ее через AB. Поделим все города на две группы: к первой группе отнесем город A и те города, кратчайший путь из которых в город A не проходил по дороге AB, а ко второй — все остальные. Нужно считать, что город B окажется во второй группе — иначе во второй группе не будет вообще ни одного города; ведь если AB — не кратчайший путь из A и B, то ни один из кратчайших путей не может проходить по дороге AB, то есть дорога AB тогда — бесполезная.

Пусть M и N — города, кратчайший путь между которыми составляет теперь больше 500 *км*. Значит, раньше кратчайший путь между M и N проходил по дороге AB. Но тогда кратчайший путь в город A из одного из этих городов проходил по дороге AB, а из другого — нет (см. замечание в начале решения); следовательно, города M и N принадлежат разным группам. Рассуждая от противного, получаем, что любые два города, принадлежащие одной и той же группе, могут быть соединены путем длины меньше 500 *км*.

Поскольку из города A по-прежнему можно проехать в город B, то найдутся два города C и D такие, что C принадлежит первой группе, а D — второй, и город C соединен дорогой с D. Теперь понятно, как из любого города M первой группы попасть в любой город N второй группы, проехав меньше 1500 *км*: нужно из M поехать вначале в город C (этот путь меньше 500 *км*, так как M и C принадлежат одной и той же группе), затем — из C в D (длина дороги CD меньше 500 *км* по условию), и, наконец, из города D — в город N (города D и N — из одной группы, поэтому путь из D в N снова меньше 500 *км*) — см. рисунок 1.

Оценку 1500 *км* нельзя улучшить. Действительно, если четыре города A, B, C и D расположены так, как показано на рисунке 2 ($ABCD$ — трапеция такая, что при продолжении ее боковых сторон получается равносторонний треугольник), то, закрыв дорогу AB, получим, что длина кратчайшего пути между A и B равна $(500+2a)$ *км*, где a можно сделать сколь угодно близким к 500.

С. Елисеев

М344. *На шахматной доске отмечены центры всех 64 полей. Можно ли провести на доске 13 прямых так, чтобы в каждой из частей, на которые эти прямые делят доску, оказалось не более одной отмеченной точки? (Прямые не должны проходить через центры полей.)*

◆

На рисунке 3 показано, как провести 14 прямых (на рисунке эти прямые — красные), разделяющих все центры полей шахматной доски.

Однако 13 прямых для этого недостаточно.

Действительно, рассмотрим квадрат, проходящий через центры всех 28 граничных клеток (на рисунке 4 это квадрат из черных точек). Ясно, что 13 прямых пересекают его не более чем в 26 точках, и поэтому разрезают не более чем на 26 частей, то есть два «граничных» центра окажутся в одной части. Значит, для разделения 28 граничных, а следовательно, и всех центров понадобится не менее 14 прямых.

Ю. Лысов

М345. *В последовательности 1 9 7 5 2 3 ... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. Встретятся ли в этой последовательности подряд*

◆

Для решения задачи пункта а) достаточно заметить, что в последовательности 1975... после каждой четной цифры идут подряд четыре нечетные цифры. Поэтому четверка 1 2 3 4 в этой последовательности встретиться не может.

Пункты б) и в) разберем более подробно.

В условии задачи дано правило, как по четырем рядом стоящим цифрам определять следующую цифру. Попробуем

а) четыре цифры 1 2 3 4?
б) вторично цифры 1 9 7 5?
в) цифры 8 1 9 7?

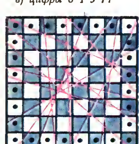
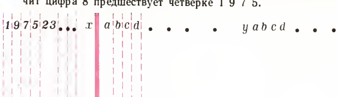




Рис. 4.

сделать «наоборот»: по четырем рядом стоящим цифрам $a\ b\ c\ d$ определить предшествующую им цифру x. Поскольку цифра d следует за четверкой цифр $x\ a\ b\ c$, то цифра d равна последней цифре суммы $x + a + b + c$ и, значит, $x + a + b + c = 10k + d$ при некотором целом k. Отсюда, $x = 10k + (d - a - b - c)$. Поскольку x — цифра, то из последнего выражения следует, что x равно остатку от деления на 10 числа $(d - a - b - c)$. Разделить число p на число q с остатком, — значит, найти числа s и r такие, что $p = sq + r$ и $0 \leqslant r < q$. (Обратите внимание, что остаток от деления числа -13 на 10 равен 7, а не -3!) Остаток от деления одного целого числа на другое определяется однозначно; значит, цифра x также определяется однозначно.

Например, чтобы определить цифру, предшествующую четверке 1 9 7 5, надо от 5 отнять 1, 9, 7 и разделить полученное число (—12) с остатком на 10. В остатке получим 8; значит цифра 8 предшествует четверке 1 9 7 5.



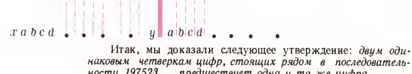


Рис. 5.

Итак, мы доказали следующее утверждение: *двум одинаковым четверкам цифр, стоящих рядом в последовательности 197523..., предшествует одна и та же цифра.*

Поскольку различных четверок цифр конечное число, а именно, 10000 штук, — то в бесконечной последовательности 197523 ... какая-то четверка встретится вторично. Пусть это будет четверка цифр a, b, c, d. Тогда последовательность имеет вид

$$1\ 9\ 7\ 5\ 2\ 3\ \ldots\ x\ a\ b\ c\ d \ldots y\ a\ b\ c\ d \ldots \qquad (*)$$

Напишем под последовательностью (*) эту же последовательность еще раз, но «сдвинутую», так, чтобы под первой четверкой $a\ b\ c\ d$ оказалась вторая (см. рис. 5). Согласно доказанному выше утверждению, цифры в первом столбце, расположенном левее красной линии, совпадают, т. е. $x = y$. Аналогично, совпадают цифры и в предшествующем x и y столбце, и так далее. Таким образом, в каждом из столбцов, расположенных левее красной линии, цифры совпадают. Поэтому под четверкой 1 9 7 5 в «верхней» последовательности стоит четверка 1 9 7 5 в «нижней» последовательности. А это и означает, что четверка 1 9 7 5 встречается в последовательности 1 9 7 5 2 3... вторично.

Как было показано выше, перед четверкой цифр 1 9 7 5 встречающейся в последовательности 1 9 7 5 2 3...во второй раз, будет стоять цифра 8. Значит, в рассматриваемой последовательности встретится и четверка 8 1 9 7.

Г. Гуревич

Рис. 6.

◆

М346. *Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении 3 : 1. Докажите, что угол KLD — прямой.*

Положим квадрат на клетчатую бумагу со стороной клетки, равной $^1/_4$ стороны квадрата, так, как показано на рисунке 6 (точки K и L при этом попадут в узлы решетки!). Очевидно, что треугольники KNL и MLD конгруэнтны, $\angle LDM \cong \angle KLN$, и значит, $\widehat{DLM} + \widehat{KLN} = 90°$. Поэтому $\widehat{DLK} = 180° - (\widehat{DLM} + \widehat{KLN}) = 180° - 90° = 90°$, что и требовалось доказать.

Л. Лиманов

М347. *Двое играют в такую игру. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого, сколько из названных им чисел — 0,1 или 2 — совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет наверняка определить загаданные числа?*

Многие читатели успешно справились с определением загаданных чисел за 14 вопросов. Покажем, что всегда можно определить загаданные числа не более чем за 13 вопросов.

Называя пары (1,2), (3,4),...,(21,22), мы используем 11 вопросов; при этом возможны следующие 4 случая:

а) после какого-то вопроса получен ответ «2»;

б) на все вопросы получены ответы «0»;

в) на какие-то два вопроса — i-й и j-й — получены ответы «1»;

г) только на один i-й вопрос получен ответ «1», на остальные вопросы—«0» (невнимательное рассмотрение этого случая многих заставило считать, что нельзя гарантировать определение загаданных чисел за 13 вопросов).

Укажем дальнейшие действия отгадывающего в каждом из этих случаев.

а) После ответа «2» загаданные числа определены.

б) Загаданы два числа из чисел 23,24,25. Задаем вопрос (23,24). Если ответ «2», то эти числа и загаданы, если ответ «1», то вопросом (23,22) определим, какое из чисел — 23 или 24 — загадано наряду с числом 25.

в) Числа в i-й паре $(2i-1)$ и $2i$, в j-й паре $-(2j-1)$ и $2j$. Задаем вопросы $(25,2i)$, $(25,2j)$. Ответ «1» на первый (двенадцатый) вопрос означает, что в i-й паре загадано число $2i$; ответ «0» указывает на число $(2i-1)$. Аналогично со вторым (тринадцатым) вопросом.

г) Вопросы $(2i, 23)$, $(2i, 24)$ при всех возможных ответах определяют загаданные числа. В самом деле, ответ «2» на первый или второй вопрос не требует пояснений. Для других комбинаций ответов на эти два вопроса мы сообщаем загаданные числа (легко проверяется, что другого мнения о том, какие числа загаданы, не может быть)— см. таблицу и рисунке 7.

Ответ	Загаданы числа
1 , 1	2i , 25
1 , 0	2i-1 , 23
0 , 1	2i-1 , 24
0 , 0	2i-1 , 25

Таблица

Рис. 7.

Итак, мы показали, что за 13 вопросов всегда можно определить загаданные числа; естественно, как следует из решения, иногда хватает и меньшего количества вопросов.

Для завершения решения докажем, что нельзя гарантировать определение загаданных чисел за 12 вопросов. После 11 вопросов все ответы могут быть «0»; при этом всегда существуют три числа, не включенные в вопросы. Если двенадцатый вопрос не содержит ни одно из этих трех чисел, то ответ «0» позволит любым двум из них быть загаданными. Если же в двенадцатый вопрос входит одно или два из этих трех чисел, то после ответа «1» также нельзя однозначно указать загаданные числа.

Ю. Лысов

◆

М348. *В таблицу 10×10 записаны числа от 1 до 100 по порядку. Затем в каждой строке и в каждом столбце ровно у половины чисел поставлен знак минус. Докажите, что в получившейся таблице сумма всех чисел равна нулю.*

Представим данную таблицу A в виде суммы двух таблиц B и C (рис. 8). Расставим знаки в каждой из таблиц A, B и C одинаковым образом — так, что в каждой строке и в каждом столбце ровно у половины чисел будет минус. Тогда в полученной таблице B сумма чисел будет равна нулю в каждом столбце, а в полученной таблице C сумма чисел будет равна нулю в каждой строке. Следовательно, сумма всех чисел в таблицах B, C, а значит, и в $A=B+C$ будет равна нулю.

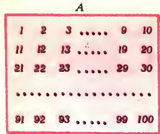
Н. Васильев

◆

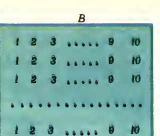
М349. *Какому условию должны удовлетворять длины сторон треугольника, чтобы треугольник, сос-*

Обозначим данный треугольник через ABC, длины его сторон BC, AC и AB — через a, b и c, величины противолежащих этим сторонам углов — через A, B и C соответственно. Предположим, что $a\leqslant b\leqslant c$ (тогда и $A\leqslant B\leqslant C$). Пусть h_a, h_b, h_c—

A



B



C

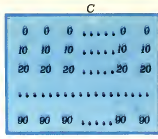


Рис. 8.

$A=B+C$

тавленный из а) высот, б) медиан, в) биссектрис данного треугольника, был подобен данному?

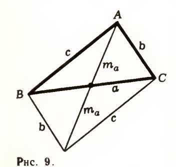


Рис. 9.

длины высот треугольника, опущенных из вершин A, B, C; m_a, m_b и m_c — длины медиан, l_a, l_b и l_c — биссектрис.

Мы будем пользоваться тем фактом, что у подобных треугольников сходственные стороны (лежащие против соответственно равных углов) пропорциональны.

а) Поскольку $h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c$ ($=2S$, где S — величина площади треугольника ABC), и $a \leqslant b \leqslant c$, мы получаем, что $h_a \geqslant h_b \geqslant h_c$. Значит, если треугольник ABC и треугольник, составленный из его высот, подобны, то сходственными у них будут стороны длины a и h_c, b и h_b, c и h_a соответственно. Поэтому в случае подобия должны быть выполнены равенства $h_a : h_b : h_c = c : b : a$, то есть $\frac{h_a}{h_b} = \frac{c}{b}$ и $\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}$. Второе соотношение всегда имеет место, поэтому треугольник ABC ($a \leqslant b \leqslant c$) будет подобен треугольнику из своих высот, если $\frac{h_a}{h_b} = \frac{c}{b}$. Но $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$, следовательно, должно быть $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, откуда $b^2 = ac$.

б) Прежде всего, как и в пункте а), выясним, какие стороны у треугольника ABC ($a \leqslant b \leqslant c$!) и у треугольника, составленного из его медиан, должны быть сходственными. Для этого докажем, что если $a \leqslant b \leqslant c$, то $m_a \geqslant m_b \geqslant m_c$. Выразим m_a, m_b и m_c через длины сторон a, b и c треугольника ABC. Так как сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон, то (рис. 9):

$$(2m_a)^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$
$$(2m_b)^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2,$$
$$(2m_c)^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

Поскольку $2b^2 + 2c^2 - a^2 = (2c^2 + 2a^2 - b^2) + (3b^2 - 3a^2)$ и $3b^2 - 3a^2 \geqslant 0$, имеем $m_a \geqslant m_b$. Аналогично $m_b \geqslant m_c$, и утверждение доказано. Следовательно, должны быть справедливы следующие равенства: $m_a : m_b : m_c = c : b : a$, то есть

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{c}{b} \text{ и } \frac{m_a}{m_c} = \frac{c}{a}. \qquad (1)$$

Подставим в соотношения (1) выражения m_a, m_b и m_c через a, b и c. Получим

$$\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2a^2 + 2c^2 - b^2} = \frac{c^2}{b^2} \quad (2) \quad \text{и} \quad \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2b^2 + 2a^2 - c^2} = \frac{c^2}{a^2} \quad (2')$$

Из условия (2′) имеем

$$2b^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)(a^2 + c^2),$$

то есть либо $a = c$, либо $2b^2 = a^2 + c^2$.

Если $a=c$, то треугольник ABC — равносторонний: $a=b=c$ (так как $a\leqslant b\leqslant c$), и мы получаем это условие как частный случай условия $2b^2=a^2+c^2$.

Легко видеть, что если $2b^2=a^2+c^2$, то справедливо и условие (2). Поэтому если длины a, b и c ($a\leqslant b\leqslant c$) сторон треугольника ABC связаны соотношением $2b^2=a^2+c^2$, то этот треугольник подобен треугольнику, составленному из его медиан.

в) Снова нужно выяснить, какие стороны у треугольника ABC и у треугольника из его биссектрис могут быть сходственными (в предположении, что эти треугольники подобны). Напомним, что у нас $a\leqslant b\leqslant c$. Докажем, что тогда $l_a\geqslant l_b\geqslant l_c$.

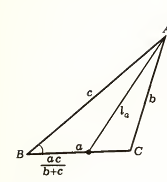


Рис. 10

Выразим l_a, l_b и l_c через a, b и c. По теореме косинусов и теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника имеем (рис. 10):

$$l_a^2 = c^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - 2c\,\frac{ac}{b+c}\cos B = c^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - $$
$$-\frac{2ac^2}{b+c}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = bc\left[1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right].$$

Аналогично

$$l_b^2 = ac\left[1-\frac{b^2}{(a+c)^2}\right] \text{ и } l_c^2 = ab\left[1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right].$$

Поскольку $a\leqslant b$, получаем $b+c\geqslant a+c$, то есть $\frac{a}{(b+c)^2}\leqslant\frac{b}{(a+c)^2}$, и $\frac{a^2b}{(b+c)^2}\leqslant\frac{ab^2}{(a+c)^2}$; следовательно, $c\left[b-\frac{a^2b}{(b+c)^2}\right]\geqslant c\left[a-\frac{ab^2}{(a+c)^2}\right]$, то есть $l_a\geqslant l_b$. Неравенство $l_b\geqslant l_c$ доказывается аналогично.

Итак, если треугольник ABC ($a\leqslant b\leqslant c$) подобен треугольнику из биссектрис, то должны быть выполнены равенства $l_c:l_b:l_a=a:b:c$, то есть $\frac{l_c}{l_a}=\frac{a}{c}$ и $\frac{l_b}{l_a}=\frac{b}{c}$.

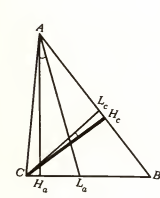


Рис. 11.

Посмотрим, когда эти условия выполняются.

Если $\frac{l_c}{l_a}=\frac{a}{c}$, то $al_a=cl_c$. Но аналогичное соотношение всегда имеет место для высот: $ah_a=ch_c$ (см. пункт а). Значит (рис. 11), прямоугольные треугольники AH_aL_a и CH_cL_c, где $|AH_a|=h_a$, $|AL_a|=l_a$, $|CH_c|=h_c$, $|CL_c|=l_c$, подобны, причем стороны длины h_a, h_c и l_a, l_c у них сходственные. Следовательно, углы, образуемые сторонами AH_a, AL_a и CH_c, CL_c, будут равны: $H_a\widehat{A}L_a=H_c\widehat{C}L_c$. Посчитаем эти углы.

Напомним, что у нас $a\leqslant b\leqslant c$, то есть $A\leqslant B\leqslant C$. Из этого условия следует, что $L_c\in[AH_c]$, а $L_a\in[BH_a]$.

Поэтому $H_a\widehat{A}L_a=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-B$, $H_c\widehat{C}L_c=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}-A$,

и так как $H_a\widehat{A}L_a=H_c\widehat{C}L_c$, то $\frac{A}{2}+B=\frac{C}{2}+A$, то есть

$B = \frac{A+C}{2} = \frac{\pi}{3}$ (сравни с решением М318, «Квант», 1975, № 12). Покажем, что на самом деле треугольник будет подобен треугольнику из своих биссектрис лишь тогда, когда у него в с е углы (а не только B!) равны $\frac{\pi}{3}$, то есть лишь тогда, когда он равносторонний.

Для этого воспользуемся вторым соотношением $\frac{l_b}{l_a} = \frac{b}{c}$.

Опишем вокруг треугольника ABC с углом B, равным $\frac{\pi}{3}$, окружность и построим на основании AC этого треугольника правильный треугольник $AB'C$ (рис. 12). Если $|B'D| = 2R$ — диаметр окружности, то BD, очевидно, биссектриса угла B, так что $|BL_b| = l_b$. Обозначим угол BCB' через φ; легко видеть, что $\varphi = \widehat{BCB'} = \widehat{BAB'} = \widehat{BDB'}$, так что

$$l_b = |BD| - |DL_b| = 2R\cos\varphi - \frac{R}{2\cos\varphi}.$$

Поскольку $b = R\sqrt{3}$, имеем $\frac{l_b}{b} = \frac{2\cos\varphi - 1/2\cos\varphi}{\sqrt{3}}$.

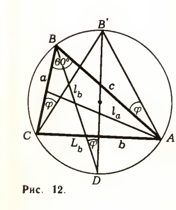


Рис. 12.

Далее

$$\frac{l_a}{c} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\varphi}{2}\right)\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\varphi}{2}},$$

и так как $\frac{l_b}{b} = \frac{l_a}{c}$, должно быть

$$\cos\frac{\varphi}{2}\left(2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi}\right) = \frac{3}{2}. \qquad (*)$$

Легко видеть, что $\varphi = 0$ — корень этого уравнения. Тогда $A = B = C = \frac{\pi}{3}$, и треугольник ABC равностороинний (совпадает с треугольником $AB'C$). Далее заметим, что $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{3}$. Поэтому $\cos\frac{\varphi}{2}$ убывает $\left(\text{от } 1 \text{ до } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $2\cos\varphi$ убывает, $\frac{1}{2\cos\varphi}$ возрастает, так что $2\cos\varphi - \frac{1}{2\cos\varphi}$ убывает, и вся левая часть, когда $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ убывает. Поэтому у уравнения (*) в промежутке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right[$ корней, отличных от нуля, нет, и мы получаем окончательный ответ: если треугольник подобен треугольнику, составленному из его биссектрис, то этот треугольник равносторонний.

И. Клумова

М350. *С белого углового поля шахматной доски размерами $n \times m$ (n и m больше 1) начинает двигаться слон. Дойдя до края доски, слон поворачивает под прямым углом. Попав в угол, он останавливается.*

а) При каких n и m слон обойдет все белые поля доски?

б) Сколько всего полей он обойдет на доске $n \times m$?

Рассмотрите в качестве примеров доски размерами 10×15, 10×25, 15×25.

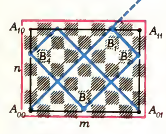


Рис. 13.

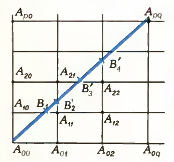


Рис. 14.

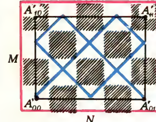


Рис 15.

а) Рассмотрим прямоугольник $A_{00}A_{01}A_{11}A_{10}$ с вершинами в центрах угловых полей (рис. 13) $|A_{00}A_{10}|=n-1$, $|A_{00}A_{01}|=m-1$. Возьмем *решетку*, порождаемую этим прямоугольником (рис. 14). Обозначим *узлы* такой решетки через A_{ij}, $i,j=0,1,2,\ldots$ (Узел A_{ij} — это точка пересечения прямой, проходящей через A_{i0} параллельно $(A_{00}A_{01})$, с прямой, проходящей через A_{0j} параллельно $(A_{00}A_{10})$; точки A_{i0} $(i=1,2,\ldots)$ лежат на прямой $A_{00}A_{10}$, точки A_{0j} $(j=1,2,\ldots)$ — на прямой $A_{00}A_{01}$, причем $|A_{(i-1)0}A_{i0}|=|A_{i0}A_{(i+1)0}|=|A_{00}A_{10}|$, $|A_{0(j-1)}A_{0j}|=|A_{0j}A_{0(j+1)}|=|A_{00}A_{01}|$.)

Проведем из точки A_{00} луч d под углом 45° к прямой $A_{00}A_{01}$ (биссектрису прямого угла решетки). Тогда пути слона $A_{00}B_1B_2B_3\ldots$ по доске будет соответствовать последовательность точек A_{00}, B_1, B_2', B_3',..., в которых луч d пересекается со сторонами решетки. Слон останавливается на l-м ходу (попав в угол) тогда и только тогда, когда точка B_l' попадает в узел решетки.

Пусть A_{pq} — первый (не считая A_{00}) узел решетки, лежащий на луче d (он соответствует достигнутому слоном угловому полю доски). Поскольку $A_{00}A_{0q}A_{pq}A_{p0}$ — квадрат,

$$p(n-1)=q(m-1)=a; \qquad (1)$$

и число a — наименьшее общее кратное чисел $m-1$ и $n-1$ (напомним, что узел A_{pq} — первый).

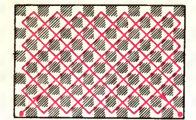
Между узлами A_{00} и A_{pq} луч d пересекает стороны решетки $p+q$ раз, и соответственно $p+q$ раз слон попадет на край доски. На границе доски $2m+2n-4$ полей — поровну белых и черных. Слон побывает на всех белых полях доски в том и только том случае, если он побывает на всех граничных белых полях, т. е. если

$$p+q=m+n-2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что $\frac{a}{m-1}+\frac{a}{n-1}=(m-1)+(n-1)$, откуда $a=(m-1)(n-1)$. Но наименьшее общее кратное двух чисел равно их произведению тогда и только тогда, когда они взаимно просты; и мы получаем ответ на пункт а) задачи: слон обойдет в с е белые поля доски тогда и только тогда, когда числа $m-1$ и $n-1$ взаимно просты.

б) Если бы каждое «внутреннее» белое поле доски, через которое слон проходит два раза, считалось дважды, то число белых полей, проходимых слоном, было бы равно $a+1$ (поскольку длина стороны квадрата $|A_{00}A_{0q}|=a$, a — целое число, на диагонали $A_{00}A_{pq}$ лежат центры $a+1$ квадратиков со стороной единица). Чтобы найти, сколько белых полей обойдет слон на самом деле, нужно из $a+1$ вычесть число внутренних белых полей, проходимых слоном дважды. Посчитаем, сколько таких полей.

Обозначим через b наибольший общий делитель чисел $m-1$ и $n-1$ (сейчас мы уже предполагаем, что числа $m-1$ и $n-1$ не взаимно просты; тогда $b>1$ и $(m-1)\times(n-1)=ab$). Положим $M=\frac{m-1}{b}+1$, $N=\frac{n-1}{b}+1$. Числа $M-1$ и $N-1$ взаимно просты, поэтому, если взять доску размерами $N \times M$, то слон, начав двигаться с белого углового поля, обойдет все ее белые поля. Прямоугольники $A_{00}A_{10}A_{11}A_{01}$ и $A'_{00}A'_{10}A'_{11}A'_{01}$ (рис. 15) подобны, поэтому числа самопересечений путей слона на обеих досках (размерами $n \times m$ и $N \times M$) одинаковы. Но так как слон попадает на все граничные белые поля доски $N \times M$ и проходит по всем ее диагоналям, то во


а)

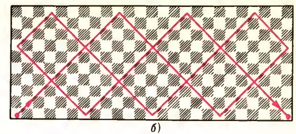

б)

Рис. 16.

всех внутренних белых полях этой доски (не лежащих на краю, путь слона самопересекается. Число же белых полей, не лежащих на границе доски $N\times M$, равно $\left[\frac{MN-(2M+2N-4)+1}{2}\right]=\left[\frac{(M-2)(N-2)+1}{2}\right]$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x). Следовательно, на доске $n\times m$ слон обойдет $a+1-\left[\frac{(M-2)(N-2)+1}{2}\right]=$

$$=\frac{(m-1)(n-1)}{b}-\left[\frac{\left(\frac{m-1}{b}-1\right)\left(\frac{n-1}{b}-1\right)+1}{2}-1\right]=$$

$$=\frac{(m-1)(n-1)}{b}-\left[\frac{\left(\frac{m-1}{b}-1\right)\left(\frac{n-1}{b}-1\right)-1}{2}\right]$$ белых полей.

Случаи досок размерами 10×15 и 10×25 приведены на рисунках 16, *а*, *б* (на доске 10×15 слон обходит все белые поля, на доске 10×25 — 66 полей). На доске 15×25 слон обойдет 136 полей.

◆ *Е. Гик, А. Жорницкий*

Ф353. *Фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала равно F. Каким оно станет, если зеркало нагреть на t градусов? Во сколько раз увеличится при этом световой поток Φ от Солнца, который можно сфокусировать зеркалом?*

Коэффициент линейного расширения металла, из которого сделано зеркало, равен α.

Сферическое зеркало представляет собой поверхность, имеющую форму сферического сегмента. При нагревании сферический сегмент расширяется так же, как и целая сфера, т. е. любые линейные размеры изменяются пропорционально множителю $(1+\alpha t)$, а любые площади — пропорционально $(1+\alpha t)^2$.

Следовательно, радиус сферы, частью которой является зеркало, при нагревании на t градусов увеличится до

$$R'=R\ (1+\alpha t),$$

а площадь сечения зеркала, перпендикулярная солнечным лучам, станет равной

$$S'=S\ (1+\alpha t)^2.$$

Здесь R — бывший радиус сферы, S — бывшая площадь сечения зеркала. Поскольку коэффициент линейного расширения α очень мал, $(1+\alpha t)^2\approx1+2\alpha t$, и $S'=S\ (1+2\alpha t)$.

Таким образом, фокусное расстояние зеркала будет равно

$$F'=R'/2=R\ (1+\alpha t)/2=F\ (1+\alpha t),$$

а световой поток $\Phi'=ES'$ (E — освещенность зеркала) по сравнению со световым потоком $\Phi=ES$ увеличится в

$$\frac{\Phi'}{\Phi}=\frac{ES'}{ES}=1+2\alpha t \text{ раз}.$$

◆

Ф354. *Необходимо сконструировать печь, на нагревательном элементе которой должна выделяться мощность*

Так как сопротивление нагрузки (нагревательного элемента) R и сопротивление подводящих проводов $r=1$ *ом* включены последовательно, то

$$U=I\ (R+r). \qquad (1)$$

2,1 квт. Напряжение сети равно 220 в, сопротивление подводящих проводов 1 ом. Каким необходимо сделать сопротивление нагревательного элемента печи?

Здесь $U = 220$ *в* — напряжение сети, I — ток в цепи.

Тепловая мощность, выделяющаяся на нагрузке, равна

$$P = I^2 R. \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) ток I, получим квадратное уравнение для R:

$$PR^2 + R(2rP - U^2) + Pr^2 = 0.$$

Из этого уравнения непосредственно находим

$$R_1 \approx 21 \text{ ом}, \quad R_2 \approx 0{,}05 \text{ ом}.$$

При обоих значениях R на нагрузке будет выделяться мощность 2,1 *квт*, но при $R = 0{,}05$ *ом* на подводящих проводах выделится мощность в $\frac{I^2 r}{I^2 R} = \frac{1}{0{,}05} = 20$ раз больше, чем на нагрузке! Ясно, что это недопустимо. Следовательно, нужно выбрать сопротивление нагревательного элемента $R = 21$ *ом*.

И. Слободецкий

◆

Ф355. *На pV-диаграмме (рис. 17) изображен замкнутый процесс, проведенный с одним молем газа. Участки $1 \to 2$ и $3 \to 4$ графика — прямые, проходящие через начало координат, а участки $2 \to 3$ и $4 \to 1$ — изотермы. Нарисовать график этого процесса на TV-диаграмме. Найти объем V_3, если известны объемы V_1 и $V_2 = V_4 = V$.*

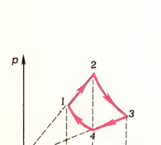


Рис. 17.

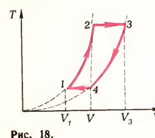


Рис. 18.

Для того чтобы построить график данного процесса на диаграмме зависимости абсолютной температуры от объема, найдем прежде всего зависимость между T и V для процессов $1 \to 2$ и $3 \to 4$. На pV-диаграмме графики этих процессов — прямые, проходящие через начало координат, поэтому можно записать:

для процесса $1 \to 2$ $\quad p = \alpha V$, где $\alpha = \text{const}$;

для процесса $3 \to 4$ $\quad p = \beta V$, где $\beta = \text{const}$ ($\beta < \alpha$).

Сопоставляя эти уравнения процессов с уравнением состояния идеального газа $pV = \nu RT$ ($\nu = 1$ *моль*), получим, что

$$\text{в процессе } 1 \to 2 \quad T = \frac{\alpha}{\nu R} V^2,$$

$$\text{а в процессе } 3 \to 4 \quad T = \frac{\beta}{\nu R} V^2.$$

Таким образом, оба процесса на TV-диаграмме изображаются параболами (рис. 18), причем парабола для процесса $1 \to 2$ идет более круто, так как $\alpha > \beta$. Состояния 2 и 4 характеризуются одинаковыми объемами $V_2 = V_4 = V$ (по условию), следовательно, на TV-диаграмме они лежат на одной вертикальной прямой $V = \text{const}$, пересекающей обе параболы. Изотермы $2 \to 3$ и $4 \to 1$ на TV-диаграмме изображаются горизонтальными отрезками, начинающимися в точках 2 и 4 и идущими до пересечения с соседней параболой в точках 3 и 1.

Теперь найдем объем V_3. Поскольку участки $2 \to 3$ и $4 \to 1$ — изотермы,

$$T_2 = T_3 \text{ и } T_1 = T_4.$$

Перепишем эти равенства, воспользовавшись уже известными нам выражениями температур через соответствующие объемы:

$$\frac{\alpha}{\nu R} V^2 = \frac{\beta}{\nu R} V_3^2$$

и

$$\frac{\alpha}{\nu R} V_1^2 = \frac{\beta}{\nu R} V^2.$$

Поделив первое равенство на второе, найдем

$$V_3 = \frac{V^2}{V_1}.$$

Ф356. *С какой скоростью движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения? Затмение наблюдается на экваторе. Для простоты считать, что земная ось перпендикулярна земной и лунной орбитам.*

Для оценки будем считать, что расстояние Луны до Земли $R_1 = 384\,000$ *км*, а период обращения вокруг Земли $T_1 = 28$ *сут* $= 2\,419\,200$ *сек*. Аналогично примем, что радиус Земли $R_2 = 6\,400$ *км* и Земля делает полный оборот вокруг своей оси за время $T_2 = 1$ *сут* $= 86\,400$ *сек*. Тогда скорость движения Луны по круговой орбите

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T_1} \approx 995 \text{ м/сек},$$

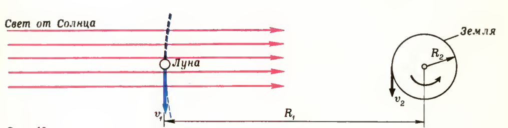


Рис. 19.

а линейная скорость точек земной поверхности

$$v_2 = \frac{2\pi R_2}{T_2} \approx 465 \text{ м/сек},$$

причем, для той области поверхности Земли, где наблюдается тень от Луны, обе скорости направлены в одну сторону (рис. 19).

Поскольку солнечные лучи можно считать параллельными и размеры Луны малы, тень Луны движется относительно земной поверхности в полдень со скоростью

$$v = v_1 - v_2 = 2\pi\left(\frac{R_1}{T_1} - \frac{R_2}{T_2}\right) \approx 530 \text{ м/сек}.$$

◆

Ф357. *Кубик массы m прикреплен к двум пружинам с жесткостями k_1 и k_2 и длинами в недеформированном состоянии l_1 и l_2 соответственно. Пружины закреплены другими концами (рис. 20), так что кубик*

Введем систему координат с началом в точке O (на левой стенке) и с положительным направлением оси OX вправо. Пусть координата кубика равна x ($0<x<L$); следовательно, он находится на расстоянии x от левой стенки и на расстоянии $L-x$ от правой стенки (см. рис. 20).

Обозначим через F_1 проекцию силы, действующей на кубик со стороны левой пружины. По закону Гука

$$F_1 = k_1(l_1 - x).$$

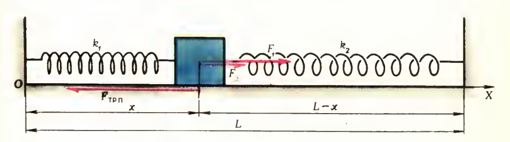


Рис. 20.

может двигаться по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между кубиком и плоскостью μ, расстояние между точками закрепления пружин L, размер кубика мал и им можно пренебречь. Найти область, в которой кубик может находиться в равновесии.

При $x>l_1$ проекция отрицательна, т. е. сила направлена влево (левая пружина растянута), при $x<l_1$ — вправо. Аналогично проекция силы, действующей на кубик со стороны правой пружины, равна

$$F_2=k_2[(L-x)-l_2].$$

При $(L-x)>l_2$ правая пружина растянута, сила направлена вправо $(F_2>0)$, при $(L-x)<l_2$ — влево. Проекцию результирующей силы запишем в виде

$$F=F_1+F_2=(k_1l_1+k_2L-k_2l_2)-(k_1+k_2)x.$$

Если кубик не прижат ни к левой, ни к правой стенке, то при равновесии сила $\mathbf{F}$ может компенсироваться только силой трения покоя $\mathbf{F}_{тр.п}$. Считая, что абсолютная величина силы трения покоя не может превысить значения $F_{тр.п\,max}=\mu N$, где N — сила нормального давления $(N=mg)$, получаем

$$-\mu N\leqslant F\leqslant \mu N,$$

или

$$-\mu mg\leqslant (k_1l_1+k_2L-k_2l_2)-(k_1+k_2)x\leqslant \mu mg.$$

Обозначим

$$x_1=(k_1l_1+k_2L-k_2l_2-\mu mg)/(k_1+k_2),$$
$$x_2=(k_1l_1+k_2L-k_2l_2+\mu mg)/(k_1+k_2).$$

Тогда последнюю систему неравенств можно переписать так:

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2.$$

Очевидно, что кубик не может проникнуть ни в правую, ни в левую стенки. Следовательно, область равновесия определяется неравенствами

$$x_{min}\leqslant x\leqslant x_{max},$$

где

$$x_{min}=\begin{cases}x_1, & \text{если } x_1\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } x_1\leqslant 0,\end{cases}$$

$$x_{max}=\begin{cases}x_2, & \text{если } x_2\leqslant L,\\ L, & \text{если } x_2\geqslant L.\end{cases}$$

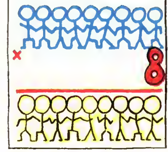
Б. Буховцев



Два квадрата

Верхний квадрат обладает удивительным свойством: суммы чисел по вертикалям, горизонталям и диагоналям одинаковы и равны 15.

А сможете ли вы разместить цифры от 1 до 9 так, чтобы эти суммы были различны?!



Одинокая восьмерка

Множимое и произведение примера состоят из девяти цифр от 1 до 9 включительно. Восстановите запись примера.



Женские имена

В этом примере на умножение разными буквами зашифрованы некоторые различные цифры, вместо крестиков могут стоять любые цифры. Расшифруйте пример!

Л. Мочалов



А. Мышкис,
Л. Садовский

Прикладная математика

1. Что такое прикладная математика?

Трудно указать предмет, который вызвал бы в последние годы столь ожесточенные споры среди людей, имеющих отношение к математике. Пока идут эти споры, во всех промышленно развитых странах развернулась широкая подготовка специалистов в области прикладной математики; в частности, и в наших институтах специальность «прикладная математика» превращается в одну из наиболее популярных. В то же время многие выдающиеся специалисты утверждают, что никакой прикладной математики вообще нет . . .

Что же это за область, которой нет? И чем занимаются специалисты в этой области (или необласти)?

Математика начала применяться еще до того, как стала наукой. Простые арифметические и геометрические понятия и закономерности проникали во все области человеческой деятельности. Во времена же расцвета античного мира произошло оформление математики как науки с ее характерным *дедуктивным методом*, согласно которому все ее утверждения выводятся по строгим логическим правилам из немногочисленных исходных положений, принимаемых без доказательства, как аксиомы. С этого периода началось построение грандиозного здания математики.

Попутно с развитием математики расширялся и круг ее приложений. Многие важные математические понятия и методы были созданы специально для решения прикладных задач и лишь затем анализировались, развивались и обобщались в «чисто математическом» плане. Отдельные дисциплины — небесная механика, теоретическая электротехника, теория прочности, теоретическая физика и некоторые другие — оказались буквально «нашпигованными» математикой.

Однако до последних десятилетий сравнительно сложные разделы математики применялись все же лишь в небольшом числе традиционных областей науки и техники; да и там сложные задачи часто не удавалось довести до практически приемлемого решения.

В наше время электронные цифровые вычислительные машины в корне изменили представление о возможностях применения математики. С помощью ЭВМ были решены многие ранее поставленные математические задачи прикладного характера, а также и новые задачи и проблемы, относящиеся как к традиционным областям приложений, так и к новым областям, где ранее математика не находила применения. Оказалось, что не только конкретные математические результаты, но и сам строй математического мышления приносят неоценимую пользу в самых разных областях науки, техники, экономики, всей человеческой деятельности. Наступает качественно новый период развития математики — период «всеобщей математизации».

И вот стало отчетливо видно, что математика в процессе ее приложений приобретает ряд характерных особенностей, черт, родственных для различных областей приложения и в то же время порой существенно отличающихся от привычных черт «чистой» математики. Традиционное выдвижение на первый план логического со-

вершенства, глубины и общности формулировок далеко не всегда отвечает жестким требованиям современных приложений — своевременности, эффективности, экономности. Вследствие этого получилось, что специалисты в области «чистой» математики часто оказывались не в состоянии математику эффективно применять. Возникла настоятельная потребность в специалистах нового типа.

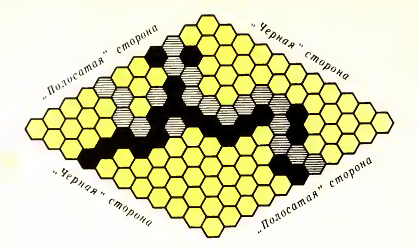
Прикладная математика призвана создавать, изучать, развивать и совершенствовать методы применения математики к задачам, возникающим за ее пределами. Таким образом, при достаточно широком взгляде на математику прикладная математика является неотъемлемой частью «математики вообще». При этом не следует представлять себе упрощенно, что будто бы математику можно отчетливо разделить на «чистую» и «прикладную» или что прикладная математика — это математическая дисциплина типа алгебры или геометрии. Применяться могут самые разнообразные разделы математики, и огромное число математических понятий и методов являются как «чистыми», так и «прикладными» (или «преимущественно чистыми», «преимущественно прикладными» и т. п.), т. е. могут входить как в чисто математические, так и в прикладные исследования. Поэтому более правильно говорить о чистой и прикладной математике не как о разделах математики, а как о ее аспектах, подходах к ней, отвечающих соответственно тезисам «математика как цель» и «математика как средство». И оказывается, что многие понятия, методы, утверждения в этих двух подходах не только играют существенно различную роль, но порой наполняются и различным содержанием (см. п. 2)!

Пока дисциплин, основанных на систематическом применении математики, было немного, а сами методы этого применения были не слишком сложны, потребности в большом числе специалистов — прикладных математиках — не было. С легкими математическими задачами справлялись сами представители этих дисциплин, а более трудные и принципиально новые задачи изучали такие великие ученые как Б. Риман, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов и другие (которые были одновременно как чистыми, так и прикладными математиками!). Однако в период всеобщей математизации, когда прикладные математические задачи становятся все более сложными и разнообразными, такого сочетания усилий недостаточно: великих ученых не хватает на все задачи! В то же время существенный вклад в решение таких задач из самых разнообразных областей человеческой деятельности сейчас могут внести лишь специалисты с широким математическим образованием, владеющие методами применения математики и обладающие соответствующими интересами и навыками. Это и есть прикладные математики. В зависимости от темперамента и обстоятельств они могут специализироваться либо в какой-то определенной области приложения математики, либо же, будучи в первую очередь математиками, переходить от одной области к другой; могут работать в составе групп или же самостоятельно.

И, наконец, отметим, что, несмотря на многовековую историю применения математики и огромный опыт такого применения к конкретным задачам, изучение принципов и общих методов этого применения только начинается. Возможно, некоторые из наших читателей примут участие в изучении, систематизации и совершенствовании этих принципов и методов, то есть в оформлении своеобразной дисциплины — общей прикладной математики.

2. Каковы особенности прикладной математики?

Говоря теперь о чистой и прикладной математике, мы будем, с одной стороны, иметь в виду «академическую»



математику, изучаемую на математических факультетах университетов и целиком основанную на дедуктивном методе; а с другой стороны — математику в том обличье, которое она приобретает в процессе приложений.

Естественно, что содержание многих понятий, утверждений, методов в чистой и прикладной математике одинаково или почти одинаково. (Пример — теорема Пифагора.) Однако сейчас мы сосредоточим внимание на случаях, когда это не так.

а) *Существование решения*

Вопрос «имеет ли данная задача решение?» не так прост, как может показаться на первый взгляд; и зачастую «чистый» и «прикладной» математики дают на него прямо противоположные ответы. Не вдаваясь в философские и логические дебри, поясним сказанное следующим примером.

Американские студенты изобрели игру в «гекс». Играют двое на четырехсторонней доске из правильных шестиугольничков (в качестве доски, например, можно использовать кафельный пол) фишками двух цветов: «черными» и «полосатыми». Обычно размеры доски — это 11×11 шестиугольничков — см. рисунок. Две противоположные стороны доски объявляются «черными», две другие — «полосатыми». Игроки по очереди выкладывают свои фишки-шестиугольнички: один — «черные», другой — «полосатые», причем фишку можно класть на любое свободное поле. За каждым из игроков закреплена пара сторон доски — одинаковых по цвету с его фишками. Цель каждого игрока — соединить связным путем свои стороны своими фишками.

Естественно поставить вопрос: а существует ли выигрышная стратегия для первого или второго игроков («стратегия» состоит в указании хода в любом уже создавшемся положении)? На этот вопрос дал ответ известный американский математик Дж. Нэш: он доказал, что существует выигрышная стратегия для первого (начинающего) игрока и не существует для второго. Приведем схему его остроумного доказательства.

Прежде всего, можно доказать (мы предоставляем это читателю), что данная игра обязательно заканчивается выигрышем одного из игроков, т. е. что ничьих здесь не бывает. Считая это известным, докажем существование выигрышной стратегии для первого игрока методом «от противного», т. е. допустим, что такой стратегии нет. Это означает, что, как бы ни старался первый игрок, второй может уйти от поражения, т. е. в силу невозможности ничьих выиграть. Но тогда второй игрок имеет выигрыш-

ную стратегию (продумайте, почему это так?).

Пусть первый игрок играет таким образом. Он ставит на любое поле первую фишку, и затем, не обращая на нее внимания, отвечает на ходы противника, пользуясь выигрышной стратегией второго игрока (как бы считая себя вторым игроком). Так он продолжает до тех пор, пока ему в силу этой стратегии не понадобится место, уже занятое первой фишкой. В этот момент он ставит фишку на любое свободное поле, а дальше опять играет, не обращая на нее внимания, пользуясь выигрышной стратегий второго игрока, и т. д. В результате после каждого своего хода первый игрок получает позицию, предусмотренную выигрышной стратегией для второго игрока, да еще впридачу одно накрытое поле. Значит, его противник очередным ходом не может закончить партию, как бы он ни ходил. А так как ничья невозможна, то первый игрок обязательно доведет партию до своей победы, вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает существование выигрышной стратегии для первого игрока; а отсюда ясно, что у второго игрока такой стратегии не может быть.

Казалось бы, задача о выигрышной стратегии полностью решена. Но тут приходит игрок и спрашивает у математика: «Как же я должен играть, чтобы наверняка выиграть?». Анализ проведенного доказательства позволяет дать только такой ответ: «Перебери все возможные стратегии (их конечное число); в силу доказанного, среди них есть по крайней мере одна выигрышная, — ею и пользуйся!» «Но как их перебрать? Их ведь так много . . .» «А это к математике не относится», — возможно, ответит математик, — «пусть инженеры изготовят устройство для такого перебора. Я свое дело сделал».

Это — ответ чистого математика. Прикладной же математик не может не учитывать реальных обстоятельств при построении решения (в данном примере — выигрышной стратегии). Нетрудно проверить, что общее число S всевозможных стратегий для первого игрока, во всяком случае, удовлетворяет оценке:

$$S > 121 \cdot 119^{120} \cdot 117^{118} \cdot 115^{116} \cdot \ldots \cdot 101^{102}$$

(напомним, что на доске у нас 121 шестиугольное поле).

Правая часть этого неравенства заведомо превосходит $100^{1} \cdot 100^{120} \cdot 100^{118} \cdot \ldots \cdot 100^{102} = 10^{2222}$. Можно быть уверенным, что никогда никакое устройство не сможет осуществить перебор такого количества вариантов!

Итак, перед нами утверждение о существовании решения задачи, вполне правомерное с точки зрения «ортодоксальной» чистой математики, но с точки зрения прикладной математики — неприемлемое. Грубо говоря, расхождение этих двух подходов получилось из-за того, что *«ортодоксально»-конечное* общее число стратегий оказалось практически. . . *бесконечным*. Поэтому, хотя абстрактное решение данной задачи и существует (доказано, что у первого игрока есть выигрышная стратегия), прикладной математик ответит, что у задачи игры в «гекс» решения нет (нельзя в общем случае указать практически реализуемый алгоритм нахождения этой выигрышной стратегии).

б) Способ рассуждений

В чистой математике нет понятий «не вполне точное определение», «не вполне строгое доказательство» и т. п.; в ней все «не вполне точно определенное» — не определено, «не вполне строго доказанное» — не доказано. При решении любой задачи в чистой математике переходить от одних утверждений к другим можно, исходя из условий этой задачи, только на основе правил строгой логики.

Не то в прикладной математике! Конечно, и в ней дедуктивные рассуждения играют весьма важную роль. Но здесь не менее важны и рассуждения иного рода, которые называют «эвристическими», «правдоподобными», «рациональными» и т. п. Это —

рассуждения, неприемлемые с точки зрения чистой математики, но при разумном их применении приводящие к правильным практическим результатам. Такие рассуждения типичны для всех дисциплин (физика, химия, биология, медицина и т. д.), кроме чистой математики; так что в этом отношении прикладная математика находится как бы на стыке математики с этими дисциплинами.

Эвристические рассуждения могут включать аналогии, численные и физические эксперименты, общие выводы на основе анализа типичных случаев (это — так называемая «неполная индукция») и другие подобные способы рассуждений. Все эти способы в чистой математике доказательной силы не имеют, однако в прикладных задачах они вполне правомерны и постоянно применяются.

В прикладных математических рассуждениях за математическими понятиями обычно стоят реальные объекты. Поэтому при решении прикладной математической задачи часто оказываются полезными сведения, не содержащиеся явно в формулировке задачи, но вытекающие из ее «физического смысла».

Однако в ряде случаев наиболее целесообразными, а порой и единственно возможными оказываются дедуктивные методы. Поэтому прикладной математик должен владеть всеми способами рассуждений.

Почему же все-таки в прикладной математике далеко не всегда удается проводить все построения так же строго, как в чистой математике? Дело в том, что часто эвристическим путем можно получить решения задач именно в тех случаях, когда чисто дедуктивные методы не приводят к цели или требуют колоссальных, неоправданных усилий. Кроме того, переход от реального объекта к его математической модели (об этом см. ниже) всегда является эвристическим и осуществляется лишь с некоторой точностью. Решение математической задачи — это только часть полного исследования.

3. Математические модели

Прикладной математик все время имеет дело с математическими моделями. Моделями могут быть геометрические фигуры, числовые множества, различные уравнения и системы уравнений и т. п., описывающие какие-либо свойства изучаемого реального объекта или явления.

Рассмотрим простой пример. Пусть нас интересует объем жидкости, которую может вместить стоящий перед нами стакан. Этот объем можно найти, например, наполнив стакан и затем вылив воду в специальный сосуд с делениями. Но вот мы говорим, что стакан — это круглый цилиндр с диаметром основания d и высотой H. Тем самым мы переходим к математической модели, которая дает возможность получить ответ: $V = \frac{\pi}{4} d^2 H$ — без эксперимента, но и без учета несовершенства реальной формы стакана, или поверхностного натяжения, и т. п.

Конечно, как мы уже говорили, математическая модель описывает реальный объект лишь приближенно.

Однако бывают случаи, когда принятая математическая модель описывает реальный объект совершенно неправильно, как говорят, модель оказывается *неадекватной* реальному объекту. Составление математической модели — дело очень ответственное. Реальный объект может иметь много различных, неравносильных моделей; и поиски адекватной и в то же время достаточно простой модели зачастую приобретают драматический характер. Кроме того, изучая модель, мы можем столкнуться с совершенно непредвиденными математическими трудностями.

Поэтому прикладному математику недостаточно только хорошего математического образования. Он должен обладать и математической эрудицией, и интуицией, чтобы при решении конкретной прикладной задачи применять именно те методы, которые дадут наибольший эффект. Он должен

уметь развивать эти методы и создавать новые. И, конечно, — довести решение до результата, используя для этого все необходимые средства, в том числе и ЭВМ.

4. Как стать математиком-прикладником?

Подготовка математиков-прикладников в нашей стране осуществляется в университетах и в ряде крупных высших технических учебных заведений. При этом наблюдается определенное сближение университетского и технического образования, в основном за счет существенного повышения общетеоретического потенциала выпускников втузов, специализирующихся по прикладной математике (специальность 0647).

В то же время во втузах сохраняется и некоторая особенность — ориентация на приложения математических методов в практических задачах, возникающих в соответствующих областях экономики, техники, транспорта, управления и т. д. Поэтому наряду с математическими курсами общетеоретического и прикладного характера (1700—2050 часов) в учебном плане (всего 4700 часов) специальности 0647 предусмотрены дисциплины, связанные с ЭВМ (300—600 часов), АСУ, теория управления, физика, механика, электротехника и радиоэлектроника. На последних семестрах читаются курсы, связанные со специализацией: методы прикладной математики, численные методы, алгоритмизация процессов управления, теория систем, системное моделирование и некоторые другие. Прикладная математика имеет три основные специализации:

1) применение средств вычислительной техники к решению задач народного хозяйства — техники, экономики, управления, планирования;
2) математическое обеспечение АСУ;
3) математическое обеспечение ЭВМ.

Первая из этих специализаций начинает играть главенствующую роль, и вот почему. Прогресс вычислительной техники и создание все более совершенных, сложных, все более быстродействующих (до $2\cdot10^8$ операций в секунду) ЭВМ сопровождается явной *унификацией*: меньшим становится разнообразие типов машин. Унификация моделей наблюдается даже в мировом масштабе: в результате соглашения между отдельными фирмами различные типы вычислительных машин оказываются совместимыми в эксплуатации.

ЭВМ второго поколения (на полупроводниках), подобные БЭСМ-6, пришедшие в 60-х годах на смену ламповым машинам первого поколения (50-е годы), обладают быстродействием до 10^6 операций в секунду, т. е. в 10^3 раз большим быстродействия машин первого поколения, и примерно в 10^6 раз больше быстродействия человека. Эти ЭВМ весьма надежны в работе, однако их эксплуатация требует создания весьма трудоемкого, дорогостоящего и медленно создаваемого внутреннего математического обеспечения, т. е. совокупности специальных программ, позволяющих переводить соответствующие алгоритмы решения задач на внутренний язык машины, понятный ей. Принято считать, что опытный программист отрабатывает 3—4 команды в день. При такой технологии требуется сотни человеко-лет предварительной работы, чтобы загрузить, например, одну машину БЭСМ-6 на один час. Выход был найден на пути передачи существенной части труда человека по созданию программ самим машинам. Однако и это не решило многих проблем; во всяком случае — для машин третьего поколения (на интегральных схемах), машин 70-х годов с быстродействием до $2\cdot10^7$ операций в секунду. Эти проблемы обретают новый характер. Машины становятся все более «прожорливыми»: они требуют задач в огромном объеме, задач, облеченных в математическую

форму, специально подготовленных для «машинного чрева». Поэтому, если созданию машин второго поколения сопутствовало выдвижение на первый план специалиста в области построения и совершенствования внутреннего математического обеспечения, то «жизненный тонус» машин третьего поколения требует наличия широкого круга лиц, способных подготовить задачу: вникнуть в ее смысловое содержание (в ее физический смысл), построить математическую модель, выбрать методы ее изучения, подготовить алгоритм решения, использовать машину для его осуществления.

Естественно, что это — грубая схема, но зачастую даже она не может быть реализована.

Дело в том, что многие задачи, особенно экономического, социологического, общественного типа, настолько сложны, что не поддаются формализации средствами современной математики. Иными словами, не удается построить математическую модель рассматриваемого явления. В такой ситуации возникает особенно острая потребность в сочетании формализованного и неформализованного подходов, сочетания математических и эвристических методов, вычислений и интуиции. Этот путь приводит к понятию *имитационной модели*. Имитационная модель изображает, имитирует изучаемый процесс; она служит для всестороннего его анализа, позволяет варьировать различными параметрами процесса и изучать последствия этих изменений. Отдельные элементы имитационной модели могут допускать формализацию, для других ее может не быть. Во всех случаях, однако, предполагается соединение возможностей машины (быстрого просчета большого числа вариантов) и интуиции, опыта человека. Имитационное моделирование — важнейшее направление в современной прикладной математике. Об этом много интересного можно почерпнуть в увлекательной книге Н. Н. Моисеева «Математик задает вопросы» (М., «Знание», 1974).

В конце 70-х годов найдут применение разрабатываемые в настоящее время машины четвертого поколения. По-видимому, они окажутся «высоко интеллигентными», позволят упростить диалог между человеком и машиной (неизбежный при исследовании имитационной модели), возьмут на себя многие функции, выполняемые ныне программистами и специалистами по внутреннему математическому обеспечению, и потребуют обильного материала для «размышлений». В этом одна из причин того, что подавляющая часть математиков-прикладников ориентируется теперь на специализацию по применению ЭВМ в задачах народного хозяйства. Другая, столь же важная, причина — в математизации наук, во все более разнообразном и глубоком использовании математических методов как в традиционных, так и в совершенно новых областях знаний.

Специальностью математика-прикладника можно овладеть, обучаясь во многих втузах страны. Среди них — известные втузы: МИИТ, МИНХиГП, МАИ, МИЭМ, МИФИ, МФТИ, Алтайский, Тульский, Донецкий, Львовский политехнические институты, Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта, Казанский авиационный, Харьковский радиотехнический институты и некоторые другие.

Кроме того, специальность «прикладная математика» есть и в средних специальных учебных заведениях: в Московском математическом техникуме (в этот техникум принимаются только москвичи), в Ленинградском механическом техникуме (у этого техникума тоже нет общежития), в Минском политехникуме, в Киевском механико-металлургическом техникуме, в Днепропетровском техникуме автоматики и телемеханики, в Днепропетровском промышленно-экономическом технику-

ме, в Ростовском электротехническом техникуме, в Кировоканском политехникуме, в Ковровском энергомеханическом техникуме, на среднетехническом факультете Тульского политехнического института.

Каждый выпускник восьмилетней школы, желающий получить углубленную математическую подготовку и одновременно интересующую его специальность, может смело подавать заявление в один из этих техникумов. [Особый интерес представляет собой вновь открываемая специальность: «Обработка информации в АСУ». По этой специальности на общий курс математики отводится (для поступающих после 8-го класса) свыше 500 учебных часов; сюда включены элементы математической логики, теории вероятностей и математической статистики. В общеспециальном цикле изучается вычислительная математика в объеме 100 учебных часов, основы программирования и алгоритмические языки в объеме 128 учебных часов. Набор по специальности «Обработка информации в АСУ» будет проводиться в Ленинградском промышленно-экономическом техникуме.]

5. А что делать в школе?

Конечно, — осваивать математику, ибо прикладная математика — это прежде всего математика. Нужно овладеть дедуктивным методом рассуждений, научиться давать точные определения, тренироваться в решении задач различного типа, в частности задач, развивающих логическое и алгоритмическое мышление.

Не пренебрегать «текстовыми» задачами, решение которых требует предварительного составления уравнений. К сожалению, текстовые задачи школьного курса математики, как правило, мало имеют общего с теми задачами, с которыми сталкивается прикладной математик. Однако важна привычка не робеть перед нематематическими текстами!

Полюбить вычисления, начиная с самых грубых прикидок *порядка* величин и самых грубых подсчетов и кончая самыми точными вычислениями с помощью всех известных вам методов и доступных вычислительных средств.

Осваивать физику и отдельные разделы других дисциплин (в том числе не включенные в школьную программу), в которых применяется математика. Научиться мыслить на «физическом» языке, проводить неформальные рассуждения, научиться пользоваться эвристическими определениями, проводить эвристические доказательства, типичные для прикладных дисциплин.

А для начала мы предлагаем вам решить несколько задач и список полезных книг и статей.

Упражнения

1. Докажите, что при игре в «гекс» ничьих не бывает.

2. Докажите оценку общего числа S стратегий для первого игрока при игре в «гекс»:

$$121 \cdot 119^{120} \cdot 117^{118} \cdot \ldots \cdot 101^{102} < S < 121 \cdot 119^{120} \cdot 117^{118} \cdot 3^4.$$

3. Сравните S с возможным числом элементарных частиц во Вселенной.

4. В стенгазете клуба «Рога и копыта» «Литературной газеты» появилось сообщение о том, что начальник пожариой охраны Камского элеватора Матвей Толстобрюхов подсчитал, что емкость этого хранилища составляет 839522634175293648209 зерен пшеницы. Укажите две грубейшие ошибки в этом подсчете.

5. Выведите простую приближенную формулу для увеличения продолжительности дня (по сравнению с 22 декабря) N-го января, в зависимости от N.

6. Оси двух круговых цилиндров радиусов R_0 и R пересекаются под прямым углом. Получите приближенные формулы для объема V полученного тела при $R_0=\text{const}$ и $R \to 0$ либо $R \to \infty$.

Литература

1. Математика в современном мире, «Мир», Москва, 1967.
2. И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко, Прикладная математика. Предмет, логика, особенности подходов, «Наукова думка», Киев, 1976.
3. Г. Штейнгауз, Задачи и размышления, «Мир», Москва, 1974.
4. Л. Садовский, Прикладная математика — новая специальность в технических вузах, «Квант», 1974, № 6.

Г. Дорофеев, Н. Розов

Чертеж в геометрической задаче

На роль чертежа в решении геометрической задачи поступающие смотрят по-разному. Одни думают, что чертеж вообще не нужен, и выполняют его подчеркнуто небрежно. Другие, наоборот, считают сам чертеж достаточным аргументом в рассуждениях и даже не находят нужным как-либо обосновывать то, что «видно из чертежа». Обе эти крайние точки зрения неправильны.

Разумеется, никакой чертеж, даже самый аккуратный, не может заменить логического доказательства, а является лишь иллюстрацией к рассуждениям. Любой геометрический факт, который мы «увидели» на чертеже, необходимо строго обосновать — только тогда можно утверждать, что этот факт действительно имеет место, а не получен из верного (или, что гораздо опаснее, неверного) рисунка.

В то же время наглядный чертеж — хороший помощник при решении задачи: он может подсказать идею необходимых рассуждений и вычислений, натолкнуть на мысль использовать некоторую теорему или придумать удачное дополнительное построение. Недаром математики вообще часто прибегают к геометрическим иллюстрациям, чтобы сделать идеи доказательства более понятными.

Однако помочь решить задачу может только чертеж, правильно отражающий существенные геометрические особенности конфигурации, о которой идет речь в условии. Именно поэтому к чертежу следует относиться очень внимательно.

Часто поступающие ограничиваются первым более или менее удачно выполненным рисунком, не интересуясь, насколько точно сделанный чертеж отвечает условию задачи. Между тем во многих задачах провести полное решение по одному чертежу в принципе невозможно, поскольку условие задачи допускает существование геометрически различных конфигураций. Кроме того, такая привязанность к одному «случайному» чертежу приводит и к иной неприятности: в ходе решения задачи может обнаружиться противоречие между получающимися результатами и исходным чертежом, которое обычно ставит поступающих в тупик. Однако при правильном понимании роли чертежа в этом нет ничего страшного — следует просто отказаться от первоначального изображения и сделать новый чертеж, соответствующий появившейся геометрической информации (конечно, при условии, что проведенные рассуждения и вычисления правильны).

При построении чертежа бывает полезно делать не примерный эскиз, дающий лишь общее представление о геометрической конфигурации, а стремиться последовательно конструировать чертеж, опираясь на данные задачи и общие геометрические факты. При таком подходе легче «увидеть» те идеи, которые можно применить в решении.

З а д а ч а 1 (МГУ, ф-т почвоведения, 1974). *В треугольнике ABC угол B равен* $90°$, $AB = 4$. *На стороне BC взята точка D так, что* $BD = 1$. *Окружность радиуса* $\sqrt{5}/2$ *проходит через точки B и D и касается в точке B окружности, описан-*

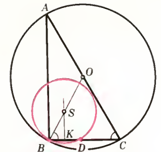


Рис. 1.

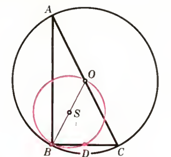


Рис. 2.

ной около треугольника ABC. Найти площадь треугольника ABC.

Прежде всего построим треугольник ABC с прямым углом B (рис. 1). Для построения окружности, описанной около этого треугольника, выясним сначала, где находится ее центр O и чему равен ее радиус. Как известно, центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит в середине гипотенузы, а ее радиус равен половине гипотенузы. Это дает возможность построить описанную окружность.

Займемся теперь построением другой окружности. Отметив на стороне BC точку D, мы можем утверждать, что центр этой окружности лежит на перпендикуляре, проведенном через середину K отрезка BD. Из условия касания окружностей заключаем, что центр рассматриваемой окружности лежит на радиусе описанной окружности, проведенном в точку касания, т. е. в точку B. Иначе говоря, центр S окружности, о которой идет речь в условии, есть точка пересечения прямой SK и медианы BO.

Построение чертежа закончено. В ходе этого построения мы установили два факта, на которых и основывается решение задачи: во-первых, центр S лежит на стороне BO равнобедренного треугольника BOC; во-вторых, перпендикуляр, опущенный из центра S на катет BC, проходит через середину отрезка BD.

Теперь проведем необходимые вычисления. Из прямоугольного треугольника BSK по теореме Пифагора находим $SK = 1$, а тогда $\operatorname{ctg}(\measuredangle SBK) = {}^1/_2$. Но $\measuredangle ACB = \measuredangle OBC$, и поэтому $BC = AB \operatorname{ctg}(\measuredangle ACB) = 2$. Следовательно, площадь треугольника ABC равна 4.

Итак, задача полностью решена, и идею решения мы получили благодаря последовательному конструированию чертежа. Однако, как это ни удивительно на первый взгляд, чертеж, изображенный на рисунке 1, полностью условию задачи не соответствует. В самом деле, проведенные вычисления показывают, что $BC = 2$, а $AC = 2\sqrt{5}$. Следовательно, $BO = \sqrt{5} = 2 \cdot SB$, т. е. BO — диаметр окружности с центром S, которая, таким образом, проходит через точку O. Другими словами, полностью соответствует данным задачи рисунок 2.

В чем же причина неполного соответствия рисунка 1 данным задачи? Дело в том, что проведенное конструирование чертежа касалось только его геометрической стороны, но не учитывало всех конкретных числовых данных. Более того, мы и не могли их учесть, поскольку все числовые размеры конфигурации, а следовательно, и ее геометрически точный вид, удается установить только после соответствующих вычислений.

Тем не менее изложенное выше решение является исчерпывающим, хотя, как мы теперь убедились, основывалось на неточном чертеже. Это объясняется просто: в наших рассуждениях нигде не использовалось

взаимное расположение точки O и окружности с центром S, выяснение их взаимного расположения при данном способе решения задачи не обязательно.

Подобная ситуация является в геометрической задаче типичной. Практически никогда, приступая к решению, мы не в состоянии построить чертеж, абсолютно точно отображающий всю специфику конфигурации, — многие ее особенности вскрываются только в ходе рассуждений. Поэтому важно прежде всего выявлять геометрические свойства, существенные в данной задаче. Это требует особого внимания и осторожности, поскольку с первого взгляда далеко не всегда очевидно, какие именно особенности конфигурации окажутся существенными и в какой мере допустимо несоответствие между данной конфигурацией и чертежом.

Разумеется, если в процессе решения выясняется, что чертеж явно не соответствует данным задачи, его следует заменить на правильный. Например, в следующей задаче даже развитое геометрическое воображение не может помочь сразу выполнить чертеж, точно отражающий существенные особенности конфигурации.

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1972). *В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом $60°$. Известно, что вершины A, B, C и середины боковых ребер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Доказать, что центр указанной сферы лежит на ребре AB, и найти высоту пирамиды.*

Для решения задачи сделаем традиционный чертеж пирамиды $SABC$ (рис. 3), построим ее высоту SH и проведем отрезок HC. Так как по условию задачи $\angle SCH = 60°$, то из треугольника CHS находим $SH = a\sqrt{3}/2$, $HC = a/2$, где через a обозначена длина ребра SC.

По условию вершины A, B, C и середины A_1, B_1, C_1 соответствующих боковых ребер лежат на одной сфере. Отсюда, в частности, следует, что через точки A, A_1, B, B_1 проходит окружность — сечение этой сферы плоскостью грани SAB. Так как $A_1B_1 \parallel AB$, то четырехугольник AA_1B_1B — трапеция, и притом равнобочная, поскольку она вписана в окружность. Поэтому

$$AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2} SA = \frac{1}{2} SB.$$

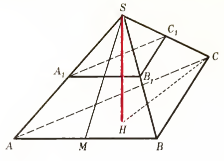


Рис. 3.

Аналогичные рассуждения для четырехугольника BB_1C_1C показывают, что пирамида $SABC$ имеет равные боковые ребра: $SA = SB = SC = AB = a$. Отсюда видно, что треугольник ASB — равносторонний, а поэтому апофема SM этой боковой грани равна $a\sqrt{3}/2$, т. е. $SM = SH$.

Таким образом, высота пирамиды совпадает с апофемой боковой грани ASB. Но тогда точка H совпадает с M, а грани ASB и ABC взаимно перпендикулярны. Поэтому изображенная на рисунке 3 картина на

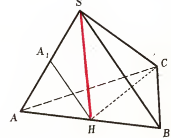


Рис. 4.

самом деле не соответствует условию задачи, верным будет рисунок 4.

Дальнейшее решение не представляет труда. Проекции на плоскость ABC (рис. 4) равных наклонных SA, SB, SC равны: $HA = HB = HC = a/2$, следовательно, точка H — центр окружности, описанной около треугольника ABC, а потому центр сферы лежит на перпендикуляре к плоскости основания, восставленном из точки H, т. е. на высоте SH пирамиды (или на ее продолжении). Центр этой сферы равноудален, например, от точек A и A_1. Поскольку $HA_1 = a/2$ как средняя линия треугольника ASB, то $HA_1 = HA$, так что точка H, лежащая на ребре AB, как раз и является центром сферы. Но радиус этой сферы по условию равен 1, $HA = a/2 = 1$, $a = 2$ и $SH = \sqrt{3}$.

Иногда само условие задачи умышленно бывает сформулировано несколько неопределенно — так, что оно явно допускает геометрически существенно различные чертежи, и непосредственно по исходным данным не ясно, какая именно из конфигураций имеется в виду. В таком случае надо изобразить на нескольких чертежах в с е возможности, отвечающие условию задачи, а затем, исследуя каждый чертеж, найти истинную геометрическую конфигурацию.

З а д а ч а 3 (МГУ, ф-т почвоведения, 1975). *В равнобочной трапеции лежат две окружности. Одна из них, радиуса* 1, *вписана в трапецию, а вторая касается двух сторон трапеции и первой окружности. Расстояние от вершины угла, образованного двумя сторонами трапеции, касающимися второй окружности, до точки касания окружностей вдвое больше диаметра второй окружности. Найти площадь трапеции.*

Непосредственно из условия задачи не ясно, в какой из углов трапеции — в тупой или в острый — вписана вторая окружность. Поэтому

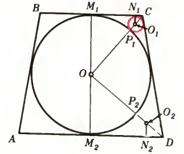


Рис. 5.

мы должны рассмотреть оба варианта (рис. 5) и попытаться выяснить, какой из них согласуется с конкретными числовыми соотношениями, заданными в условии.

Пусть O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$, O_1, O_2 — центры второй окружности (два варианта!), P_1, P_2, M_1, M_2, N_1, N_2 — точки касания. Радиусы второй окружности обозначим через r_1, r_2. Из подобия треугольников OM_1C и O_1N_1C в первом случае и OM_2D и O_2N_2D во втором имеем

$$\frac{OM_1}{O_1N_1} = \frac{OC}{O_1C}, \quad \frac{OM_2}{O_2N_2} = \frac{OD}{O_2D},$$

и, поскольку $OC = OP_1 + P_1C = 1 + 4r_1$, $OD = OP_2 + P_2D = 1 + 4r_2$, то в обоих случаях

$$\frac{1}{2r} = \frac{1+4r}{3r},$$

откуда $r = 1/2$. По теореме Пифагора из треугольников OM_1C и OM_2D соответственно получаем теперь, что

$$M_1C = 2\sqrt{2}, \ M_2D = 2\sqrt{2}.$$

Итак, если вторая окружность вписана в тупой угол трапеции, то меньшее основание трапеции равняется $4\sqrt{2}$; если же вторая окружность вписана в острый угол трапеции, то большее основание трапеции равно $4\sqrt{2}$. Между тем, если в равнобочную трапецию с основаниями a и b, где $a < b$, вписана окружность диаметра d, то выполняется

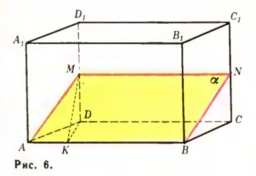


Рис. 6.

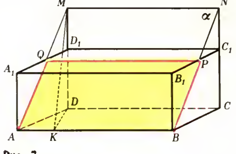


Рис. 7.

неравенство $a < d < b$ — это следует, например, из легко доказываемого и весьма полезного соотношения $d = \sqrt{ab}$. Поэтому в нашей задаче меньшее основание трапеции должно быть меньше 2, так что окружность с центром O_1 условию задачи не удовлетворяет, и следует рассматривать лишь окружность с центром O_2. Теперь уже легко найти площадь S трапеции. Пользуясь соотношением между основаниями трапеции и диаметром вписанной в нее окружности $d = \sqrt{ab}$, мы получаем равенство

$$2 = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{4\sqrt{2} \cdot BC},$$

откуда $BC = \sqrt{2}/2$ и $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot 2 = 9\sqrt{2}/2$.

В разобранной задаче возможность существования двух принципиально различных геометрических конфигураций была совершенно очевидна. Однако не всегда это так, и нужно обладать хорошим геометрическим воображением и проявлять достаточную осмотрительность, чтобы при выполнении чертежа «увидеть» все конфигурации, которые следует рассмотреть в решении.

З а д а ч а 4 (МГУ, географич. ф-т, 1968). *Высота прямой призмы равна* 1, *ее основанием служит ромб со стороной* 2 *и острым углом* 30°. *Через сторону основания проведена секущая плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом в* 60°. *Найти площадь сечения.*

На экзамене многие поступающие, выполнив рисунок 6, дали примерно следующее «решение» этой задачи: «Пусть MN — линия пересечения секущей плоскости α с плоскостью грани DCC_1D_1; опустив перпендикуляр MK на AB, по теореме о трех перпендикулярах получим, что $KD \perp AB$. Поэтому $\angle MKD$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью α и плоскостью основания, так что $\angle MKD = 60°$. Тогда

$$MK = \frac{KD}{\cos 60°} = \frac{AD \sin 30°}{\cos 60°} = 2.$$

Но MK — высота параллелограмма $AMNB$, полученного в сечении, и следовательно, искомая площадь $S = AB \cdot MK = 4$».

В этом рассуждении есть существенный пробел: чертеж, на котором оно основано, выполнен при неявном предположении, что плоскость α пересекает прямоугольник DCC_1D_1. Между тем при заданных числовых данных это вовсе не очевидно, более того — неверно: в действительности плоскость α «выходит» из данной призмы через верхнюю грань, а точка M лежит на продолжении ребра DD_1. В самом деле, найдя так же, как и выше, что $MK = 2$ (заметим, что это вычисление не зависит от положения точки M на прямой DD_1), из треугольника MDK мы получим, что $MD = \sqrt{3}$, так что MD больше D_1D. Следовательно, речь в задаче идет о конфигурации, указанной на рисунке 7, и искать надо площадь параллелограмма $AQPB$, а не

$AMNB$. Дальнейшее решение задачи не вызывает принципиальных затруднений, и мы предоставляем это читателям; искомая площадь $S = 4/\sqrt{3}$.

Еще большее внимание требуется при решении задач, в которых геометрическая конфигурация задается не числовыми, а буквенными данными, т. е. в своего рода геометрических задачах с параметрами. В этих задачах (так же, как и в алгебраических задачах с параметрами) и способ решения, и получаемый ответ могут существенно зависеть от соотношений между параметрами, определяющими конфигурацию.

Пусть, например, в разобранной только что задаче секущая плоскость проведена под углом φ к плоскости основания, а все остальные числовые данные — те же самые. Тогда в решении следует рассмотреть три случая:

1) точка M лежит на ребре DD_1;
2) точка M совпадает с D_1;
3) точка M лежит на продолжении ребра DD_1.

Какой именно из указанных случаев имеет место, зависит от величины угла φ, и определить это можно, исходя из сравнения отрезков MD и D_1D. Независимо от расположения точки M на прямой DD_1, ясно, что $MD = KD \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi$. Поэтому указанные случаи определяются условиями:

1) $\operatorname{tg} \varphi < 1$;
2) $\operatorname{tg} \varphi = 1$;
3) $\operatorname{tg} \varphi > 1$.

Таким образом, если $\varphi < 45°$, то имеет место первый случай (рис. 6), и тогда $S = 2/\cos \varphi$. Если $\varphi > 45°$, то имеет место третий случай (рис. 7), тогда $S = 2/\sin \varphi$. Что же касается случая $\varphi = 45°$, то его нужно было бы рассмотреть на специальном чертеже, но фактически можно использовать и любой из имеющихся — так довольно часто бывает при рассмотрении «крайних» значений; в этом случае $S = 2\sqrt{2}$.

Окончательный ответ записывается в виде

$$S = \begin{cases} 2/\cos \varphi, & \text{если } \varphi < 45°, \\ 2\sqrt{2}, & \text{если } \varphi = 45°, \\ 2/\sin \varphi, & \text{если } \varphi > 45°. \end{cases}$$

Можно, разумеется, включить второй случай в любой из двух других, и записать ответ более компактно.

С аналогичной ситуацией мы встречаемся и в следующей задаче. Правда, окончательный ответ в ней от вида конфигурации не зависит и одинаков для всех значений параметра, однако промежуточные вычисления проводятся по-разному для различных конфигураций. Естественно, что решение, в котором рассмотрены не все геометрически различные случаи, не может считаться полноценным, хотя формально получается правильный ответ.

З а д а ч а 5 (МГУ, мехмат, 1970). *Шар радиуса r касается плоскости P в точке A. Прямая l образует с плоскостью P угол φ, пересекает эту плоскость в точке C и касается шара в точке B. Найти длину отрезка AB, если $AC = 2r$.*

Изобразим конфигурацию, о которой идет речь в условии (рис. 8). Из точки B опустим перпендикуляр BB_1 на плоскость P и проведем отрезок CB_1; ясно, что $\angle BCB_1 = \varphi$. Далее, $OA = OB = r$, а $CB = CA = 2r$ по свойству касательных к шару, проведенных из одной точки.

Искомый отрезок AB является гипотенузой прямоугольного тре-

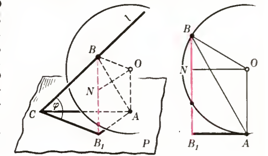


Рис. 8.

угольника BB_1A, катет BB_1 которого определяется из прямоугольного треугольника CB_1B: $BB_1 = 2r \sin\varphi$. Остается найти катет AB_1. Прямые OA и BB_1, перпендикулярные к плоскости P, лежат в одной плоскости. Проведем в ней прямую $ON \parallel AB_1$; тогда $AONB_1$ — прямоугольник, и следовательно, $AB_1 = ON$, $NB_1 = OA = r$. Так как

$$NB = BB_1 - NB_1 = 2r \sin\varphi - r,$$

то из треугольника ONB

$$ON^2 = OB^2 - NB^2 = 4r^2 \sin\varphi\,(1 - \sin\varphi),$$

а из треугольника BB_1A

$$AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{ON^2 + BB_1^2} = 2r\sqrt{\sin\varphi}.$$

Не следует, однако, думать, что задача решена. В самом деле, при вычислении отрезка NB мы существенно использовали тот факт, что точки B, N и B_1 расположены именно так, как это изображено на рисунке 8. Но из условия задачи вовсе не следует, что точка N лежит между B и B_1; точка B может лежать между точками N и B_1, точки N и B могут даже совпадать. Только рассмотрев все эти случаи, мы можем утверждать, что провели исчерпывающее решение задачи.

Если точка B лежит между N и B_1 (рис. 9), то

$$NB = NB_1 - BB_1 = r - 2r \sin\varphi,$$

а дальнейшее вычисление отрезков ON и AB проводится точно так же, как и выше; в результате мы приходим к той же формуле для отрезка AB. Если, наконец, точки N и B совпадают, то ясно, что $BB_1 = ON = r$, и $AB = r\sqrt{2}$. В этом случае в треугольнике CB_1B катет $BB_1 = r$ составляет половину гипотенузы $CB = 2r$, а потому $\varphi = 30^\circ$, т. е. $AB = 2r\sqrt{\sin\varphi}$.

Таким образом, равенство $AB = 2r\sqrt{\sin\varphi}$ справедливо при любых возможных значениях φ.

Решение этой задачи можно провести и с помощью рассуждений, не зависящих от конкретного расположения точек B, B_1 и N — попробуйте сделать это самостоятельно.

Рассмотренные задачи показывают, что тщательное выполнение чертежа имеет содержательное значение — правильно выполненный чертеж облегчает решение, а неправильный может привести к неверным выводам. В заключение заметим, что необходимо обращать внимание и на чисто техническую сторону — чертеж должен быть простым и понятным, рисовать его надо как можно более аккуратно (причем не только в чистовике, но и при черновом решении), хотя не следует впадать в крайность: геометрическая задача не есть задача по черчению, миллиметровой точности здесь не нужно. Обычно достаточно аккуратно сделать чертеж от руки, без использования чертежных инструментов (кроме, быть может, циркуля), обращая особое внимание на взаимное положение отдельных фигур. Конечно, навыки рисования от руки нужно вырабатывать у себя заранее, в процессе подготовки к экзаменам.

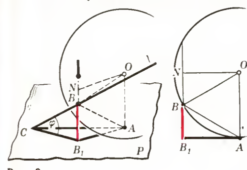


Рис. 9.

Упражнения

1 (МГУ, мехмат, 1961). На плоскости даны четыре различные точки A, B, C, D такие, что $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Доказать, что $AD \perp BC$.

2 (МГУ, мехмат, 1961). В треугольной пирамиде две грани — равносторонние треугольники со стороной a, а две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

3 (МГУ, физфак, 1962). Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания один и тот же угол φ. Определить расстояние от центра описанного шара до плоскости основания пирамиды и объем пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R.

4 (МГУ, мехмат, 1968). Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB=1$, $BC=2$ и угол ABC — тупой. Через каждую из точек B и D проведено по две прямые, одна из которых перпендикулярна к стороне AB, а другая — к стороне BC. В пересечении этих четырех прямых получился параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$. Найти площадь параллелограмма $ABCD$.

5 (МГУ, экономич. ф-т, 1971). Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, причем $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$. В угол A куба вписан шар радиуса 1/2. Найти радиус шара, вписанного в угол C куба и касающегося данного шара, если известно, что ребро куба равно 3/2.

6 (МГУ, ВМиК, 1971). Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, стороны AB и AC которого равны и образуют между собой угол α, а высота пирамиды совпадает с ребром SA и равна h. Дана вторая треугольная пирамида, имеющая ту же вершину S, а ее основанием является треугольник, вершины которого лежат на разных сторонах треугольника ABC. Найти объем второй пирамиды, если известно, что ее боковые грани равновелики, а боковые ребра равны.

7 (МГУ, экономич. ф-т, 1973). В окружность вписан равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причем точка касания является серединой основания. Определить радиус второй окружности. Если решение не единственно, рассмотреть все возможности.

8 (МГУ, ф-т почвоведения, 1974). В треугольнике ABC известно: $AC=1$, $BC=\sqrt{7}$, $\angle A=120°$. На продолжении стороны CA взята точка M так, что BM является высотой треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и M и касающейся в точке M окружности, проходящей через точки M, B и C.

9 (МГУ, ф-т почвоведения, 1975). В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга, причем каждая из них касается также трех сторон параллелограмма. Радиус одной из окружностей равен 1. Известно, что один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания равен $\sqrt{3}$. Найти площадь параллелограмма.

10 (МГУ, мехмат, 1975). Два равных ромба $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$) и $APQR$ ($AP \parallel QR$, $AR \parallel PQ$) имеют общую вершину A и лежат в одной плоскости. Известно, что $\angle BAD = \angle PAR = \alpha$, причем $\alpha < \pi/2$ и $\angle QAC = \beta$. Продолжения сторон BC и QR пересекаются в точке K. Ромбы расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AK и в одной полуплоскости относительно прямой AD. Найти величину угла KAD.

Задачи наших читателей

1. В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с острым углом $\widehat{DAB} = \gamma$. Диагонали AB_1 и BC_1 боковых граней образуют с плоскостью основания углы α и β. Определить угол между этими диагоналями.

2. Даны географические координаты двух точек на сфере радиуса R: φ_1, θ_1 и φ_2, θ_2 (φ — широта, θ — долгота). Определить расстояние по сфере между этими точками.

В. Хренов (г. Воронеж)

3. Пусть высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что

а) $|AH| = 2R|\cos\hat{A}|$, где R — радиус описанной окружности треугольника;

б) $|AH| = |BC|\,|\mathrm{ctg}\hat{A}|$.

В частности,

а) если $|AH| = R$, то $\hat{A} = 60°$ или $\hat{A} = 120°$;

б) если $|AH| = |BC|$, то $\hat{A} = 45°$ или $\hat{A} = 135°$.

Заметим, что два эти примера приведены в качестве задач 5.1 и 5.3 в брошюре «Математические соревнования. Геометрия» («Наука», 1974), где указаны неправильные ответы (забыты тупые углы). См. также журнал «Математика в школе», 1970, № 4, с. 44; 1974, № 5, с. 73.

Э. Готман (г. Арзамас)

4. Дан треугольник ABC со сторонами a, b, c; r — радиус вписанной в него окружности, R — описанной, S — его площадь. Доказать, что

а) $$\mathrm{tg}\frac{\hat{A}}{2} + \mathrm{tg}\frac{\hat{B}}{2} + \mathrm{tg}\frac{\hat{C}}{2} \leqslant \frac{9R^2}{4S};$$

б) $$\frac{\cos^2\frac{\hat{A}}{2}}{a} + \frac{\cos^2\frac{\hat{B}}{2}}{b} + \frac{\cos^2\frac{\hat{C}}{2}}{c} \geqslant \frac{27r}{8S}.$$

Для какого треугольника достигается равенство?

Т. Райков (Болгария)

Варианты вступительных экзаменов в вузы

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Сегодня математические методы исследования все шире проникают не только в естественные науки и технику, но и в гуманитарные области знания. Именно поэтому на ряде гуманитарных факультетов университетов поступающие сдают письменный экзамен по математике. В этом номере мы знакомим читателей с вариантами, предложенными поступавшим на гуманитарные факультеты МГУ в 1975 году.

Отделение политэкономии экономического факультета

1. На заводе работают токари 1-го, 2-го и 3-го разрядов. Некоторую работу два токаря 3-го разряда и один токарь 1-го разряда, работая вместе, могут выполнить на 15 минут быстрее, чем три токаря 2-го разряда. За то время, за которое один токарь 1-го разряда и один токарь 2-го разряда могут вдвоем выполнить ту же работу, один токарь 3-го разряда сделает только 5/7 этой работы. Один токарь 2-го разряда и один токарь 3-го разряда вместе могут выполнить эту работу за то же время, что и три токаря 1-го разряда. За какое время выполнит работу бригада, включающая в себя по одному токарю каждого разряда?

2. Решить уравнение

$$(\sin x+2\cos x+2)(1-2\cos x)=4\sin^2 x-3.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{3+\log_{2x}y^2}=-\log_{2x}y,\\ x+y=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

4. Прямоугольный треугольник с острым углом α расположен внутри окружности радиуса r так, что гипотенуза является хордой окружности, а вершина прямого угла лежит на диаметре, параллельном гипотенузе. Найти площадь треугольника.

5. При каком значении x выражение

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

принимает наименьшее значение?

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. Найти все решения уравнения

$$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}=\frac{5}{2}.$$

2. Дан треугольник ABC, причем $AB=AC$ и $\angle A=110°$. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle MBC=30°$, а $\angle MCB=25°$. Найти $\angle AMC$.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{x-1}+x-3\geq\sqrt{2(x-3)^2+2x-2}.$$

4. В продажу поступили соцстраховские путевки трех типов. Одна путевка 1-го типа стоит 4 руб., одна путевка 2-го типа стоит 6 руб., одна путевка 3-го типа стоит 9 руб. По путевке 1-го типа можно отдыхать 8 дней, по путевке 2-го типа 14 дней, по путевке 3-го типа 20 дней. Сколько путевок каждого типа надо купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим, а сумма, израсходованная на приобретение всех путевок, составляла 100 руб.?

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Из пункта A в пункт B вышел автобус, а из пункта B в то же самое время навстречу этому автобусу выехали грузовик и велосипедист. После встречи с грузовиком в пункте C автобус проехал до встречи с велосипедистом расстояние, равное трети пути AC. Если бы грузовик после встречи с автобусом поехал из пункта C в обратную сторону, то он встретился бы с велосипедистом посредине между пунктами B и C. Во сколько раз скорость автобуса превосходит скорость велосипедиста?

2. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_2\left(a^2x^3-5a^2x^2+\sqrt{6-x}\right)=\log_{2+a^2}\left(3-\sqrt{x-1}\right)$$

при любом значении a.

3. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}+3\operatorname{ctg}2x.$$

4. Найти сумму корней уравнения

$$2\cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x},$$

принадлежащих интервалу $2 \leqslant x \leqslant 40$.

5. В правильную треугольную пирамиду с длиной ребра основания a и двугранным углом при основании, равным 60°, вложено три шара одинакового радиуса так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и двух боковых граней пирамиды. Найти радиус каждого шара.

Факультет психологии

1. Бригаде из трех трактористов поручено вспахать поле. Если бы работали только 1-й и 2-й трактористы, то за один день было бы вспахано 45% поля. Если бы работали только 2-й и 3-й трактористы, то за два дня было бы вспахано 75% поля. Наконец, если бы работали только 1-й и 3-й трактористы, то за три дня было бы вспахано 97,5% поля. За сколько дней данное поле вспахал бы каждый тракторист в отдельности, если считать интенсивности работы каждого тракториста постоянными?

2. Вокруг треугольника ABC со сторонами $AB = 10\sqrt{2}$, $AC = 20$ и углом B, равным 45°, описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение стороны AB в точке D. Найти площадь треугольника BCD.

3. Решить уравнение

$$2 - 3\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{5 - 6\cos^2 x}{\cos^2 x}}.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{x-2}\frac{1}{5} = \log_{\frac{x-3}{x-5}}\frac{1}{5}.$$

5. Найти все целые положительные решения уравнения

$$2x^2 + 2xy - x + y = 112.$$

И. Горев

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Белорусский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет был создан в 1921 году. За время своего существования он превратился в один из крупнейших вузов страны. В частности, на трех факультетах (физическом, механико-математическом и факультете прикладной математики) университет готовит высококвалифицированные кадры физико-математического профиля. В этой статье мы коротко расскажем о физическом факультете БГУ.

Физический факультет БГУ имеет два отделения: физики и радиофизики. На отделение физики на первый курс принимается 325 человек. Специализацию студентов осуществляют девять кафедр. Из них две теоретические, где студенты занимаются вопросами квантовой механики, теории поля и элементарных частиц, статистической физики, теории относительности, теории атомных и молекулярных спектров. Остальные кафедры выпускают в основном физиков-экспериментаторов, специализирующихся по оптике и спектроскопии, физике твердого тела и полупроводников, теплофизике, биофизике, ядерной физике и др.

На отделение радиофизики на первый курс принимается 100 человек. Здесь студенты специализируются по радиотехнике и физической электронике, электрофизике, электронным математическим машинам и др.

Студенты физического факультета, начиная с 2—3 курсов, привлекаются к научной работе, которая проводится на кафедрах факультета, в лабораториях научно-исследовательского института прикладных физических проблем при БГУ, в институтах АН БССР и других НИИ Минска.

При университете имеется подготовительное отделение, которое готовит слушателей для поступления на физический и другие факультеты университета.

Поступающие на физический, механико-математический, химический факультеты и на факультет прикладной математики сдают устный экзамен по физике. В экзаменационных билетах имеются три вопроса по программе для поступающих в вузы и одна задача. Варианты задач для абитуриентов, поступающих на физический факультет и на нефизические факультеты, различаются. Ниже приводится несколько задач обоих вариантов, которые предлагались абитуриентам, поступающим в БГУ в 1975 году.

Физический факультет

1. Шарик массой m, подвешенный на нити, отклонили от положения равновесия так, что нить стала горизонтальной, и отпустили. Когда шарик проходил положение равновесия, середина нити зацепилась за гвоздь. Определить натяжение нити в тот момент, когда нижняя половина нити будет горизонтальной.

2. Тело, брошенное вертикально вверх, прошло за первые 4 *сек* путь 50 *м*. Определить начальную скорость тела. Сопротивление не учитывать; $g = 10$ *м/сек*².

3. Плотность жидкости, перекачиваемой насосом, увеличили на n %. Как при этом

изменилась скорость жидкости в насосе, если мощность насоса осталась без изменения?

4. Найти емкость системы конденсаторов, включенных между точками A и B (рис. 1), определить разность потенциалов и заряды на каждом конденсаторе, если $C_1 = 1$ *мкф*, $C_2 = 3$ *мкф*, а напряжение между точками A и B равно 10 *в*.

5. Между пластинами плоского конденсатора, подключенного к аккумулятору, находится в состоянии покоя в вакууме заряженный шарик. Определить ускорение шарика после увеличения расстояния между пластинами на 10%.

6. В оптическом центре вогнутого сферического зеркала с радиусом кривизны 50 *см* помещен точечный источник света силой 10 *св*. На расстоянии, равном диаметру зеркала (от полюса зеркала), помещен экран перпендикулярно главной оптической оси зеркала. Определить освещенность экрана в точке пересечения главной оптической оси с экраном.

7. Расстояние между двумя точечными источниками света равно 24 *см*. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием 9 *см*, чтобы изображения обоих источников получились в одной и той же точке?

Механико-математический, химический факультеты и факультет прикладной математики

1. Ящик в форме куба перемещают на некоторое расстояние: один раз волоком, а другой — кантованием (т. е. опрокидыванием через ребро). При каком значении коэффициента трения скольжения μ работы перемещения ящика волоком и кантованием равны?

2. На доске стоит цилиндр, у которого высота больше диаметра в два раза. Один из концов доски начинают медленно поднимать. Что произойдет раньше: цилиндр опрокинется или соскользнет с доски, если коэффициент трения цилиндра о доску 0,4?

3. Шарик массой m на нити движется по окружности в вертикальной плоскости так, что полная энергия его остается постоянной. На сколько сила натяжения нити будет больше при прохождении шарика через нижнюю точку, чем через верхнюю? Сопротивление воздуха не учитывать.

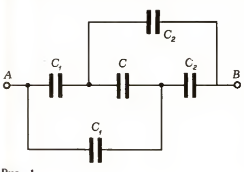


Рис. 1.

4. С наклонной плоскости высотой h соскальзывает металлический брусок. На сколько градусов нагревается брусок, если $1/n$-я часть выделившегося при трении количества теплоты идет на нагревание бруска? Скорость бруска в конце наклонной плоскости v, удельная теплоемкость материала бруска c.

5. Металлический цилиндр объемом 400 $см^3$ был взвешен в воздухе и в углекислом газе. Разность в весе получилась в $2{,}8 \cdot 10^{-3}$ *н*. Каковы плотности углекислого газа и воздуха на основании данных опыта, если их отношение равно 20/13?

6. В фокусе вогнутого зеркала с радиусом кривизны 40 *см* помещен точечный источник с силой света 16 *св*. На двойном фокусном расстоянии от зеркала перпендикулярно оптической оси установлен экран. Определить освещенность в середине экрана.

7. Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы и плоского зеркала, установленного в ее фокальной плоскости. Источник света помещен на главной оптической оси и равноудален от линзы и зеркала. Определить местоположение всех изображений и расстояние между ними, если фокусное расстояние линзы равно F.

А. Саржевский, С. Галко

Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова (Ленина)

Казанский государственный университет имени В. И. Ульянова (Ленина) является одним из старейших университетов СССР — он основан в 1804 году. В нем учился, вел преподавание и почти 20 лет был ректором великий русский ученый Н. И. Лобачевский. Здесь же начиналась революционная деятельность В. И. Ленина (в то время он был студентом юридического факультета).

После Великой Октябрьской социалистической революции университет вырос в крупное научно-педагогическое учебное заведение и имеет теперь 8 факультетов: механико-математический, физический, химический, биолого-почвенный, геологический, географический, юридический и историко-филологический (с отделением татарского языка и литературы).

На дневном отделении механико-математического факультета имеется 10 кафедр, НИИ математики и механики, вычислитель-

иый центр. Обучение проводится по трем специальностям: математика, прикладная математика и механика, а иа вечернем — по прикладиой математике.

Специальность «математика» разделена иа следующие специализации: алгебра, геометрия (исследования по обобщенным пространствам), диффереициальиые уравнения, теория функций и фуикциональный анализ. Помимо глубокой подготовки в избранной области, студенты овладевают методами вычислений, программированием, проходят практику в ВЦ и осваивают работу иа ЭВМ.

Специальиость «прикладная математика» разделяется на специализации: применение средств вычислительиой техники (математическая логика, теория вероятностей, методы оптимизацин, численные методы), математическое обеспечение ЭВМ, математическое обеспечение АСУ, теоретическая кибернетика.

Специальность «механика» включает специализацни: гидроаэромеханика (в частности, подземиая гидромеханика) и теория упругости и пластичности. В первой изучаются двнжения в жидких и газообразных средах (в частности, фнльтрацня в иефтеносиых пластах) и техника эксперимента в аэродинамических лабораториях, во второй — теории упругости, пластичности и ползучести, методы расчета оболочек и соответствующая экспериментальная часть.

Выпускники факультета иаправляются в НИИ, конструкторские и проектные бюро и вузы.

На фнзическом факультете 12 кафедр, три проблемные лаборатории (магнитиой радиоспектроскопии, радиоастрономии и биоиики) и две астрономические обсерватории (городская — учебная и загородная — научно-исследовательская имени В. П. Энгельгардта). Подготовка студентов ведется по трем основным направлениям: физика, радиофизика и электроиика, астрономия. Внутри этих специальностей осуществляются специализации: теоретическая физика, теория относительности и гравитации, физика твердого тела, теплофизика, физика полимеров, оптика и спектроскопия, радиоэлектроиика, биоэлектроиика, астрономия, астроиомогеодезия.

Ниже приведены варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи из билетов устного экзамена по физике в Казанском государственном уииверситете в 1975 году.

Математика

Вариант 1

(специальиость: прикладиая математика)

1. В прогрессии 1, $\sin x$, $\sin^2 x$, ... сумма первых n членов в m раз больше суммы всех члеиов прогрессии. При каких x, прииадлежащих интервалу $(0, 2\pi)$, это возможио? Исследовать влияиие иа решение чисел n и m.

2. Для всех вещественных чисел a решить иеравенство

$$\frac{x^2-2^{1-|a|}x+1}{x^2-a^2}<0.$$

3. В правильной четырехугольной пирамиде часть ее высоты (две трети от основаиия) служит диаметром шара. Найти длину линии пересечения поверхностей шара и пирамиды, если сторона основания пирамиды $a=\frac{\sqrt{14}}{2}$ есть среднее пропорциональное между высотой пирамиды и диаметром шара.

Вариант 2

(специальность: математика и механика)

1. Решить неравенство

$$\log_2(4^x-5\cdot 2^x+2)>2.$$

2. Решить уравнение

$$\cos[\pi\log_2(x-4)]\cos[\pi\log_2(x-1)]=1.$$

3. В тетраэдре, ребро которого $a=3\sqrt{3}$, высота служит диаметром шара. Найти длину линии пересечення поверхностей тетраэдра и шара.

Вариант 3

(специальность физика, радиофизика и астрономия)

1. Решить уравнение

$$7\sin x\cdot\cos x+\sin x-\cos x-1=0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{3+|x^2-4x|}(x^2+|x-3|)<1.$$

3. Объем конуса в m раз больше объема вписанного в него шара. Определить угол между образующей и плоскостью основания при наимеиьшем возможном значенин m.

Физика

1. Между двумя лодками, покоящимися на поверхности озера, протянута веревка. Человек, находящийся иа первой лодке, тянет веревку с постоянной силой 50 *н*. Определить скорость, с которой будет двигаться первая лодка относительно берега и относительно второй лодки, через 5 *сек* после того, как человек на первой лодке иачал тянуть веревку. Масса первой лодки с человеком 250 *кг*, второй лодки с грузом — 500 *кг*. Сопротивлением воды пренебречь.

2. На горизонтальной плоскости лежит брусок *1* с массой M, а на нем находится брусок *2* с массой m. Найти минимальное значение силы, приложенной к бруску *1*, при котором брусок *2* соскальзывает. Коэффициеит трения бруска *1* о плоскость равен k_1, коэффициент трения между брусками — k_2.

3. В U-образную запаянную с одного конца трубку с длиной колена L налита жидкость так, что в закрытом колене остался воздух, а уровень жидкости в открытом

колене совпадает с краем трубки. Затем часть жидкости выпустили через кран в нижней части сосуда. При этом уровни жидкости в обоих коленах сравнялись и остановились на середине трубок. Какова была разность уровней вначале, если плотность жидкости ρ и атмосферное давление p известны?

4. Заряд конденсатора в схеме, изображенной на рисунке 2, равен q. Определить емкость конденсатора, считая э. д. с. батарей $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, их внутренние сопротивления r_1 и r_2, а также сопротивления R_1 и R_2 известными.

5. Между пластинами плоского конденсатора на расстоянии 0,8 *см* от нижней пластины «висит» заряженный шарик. Разность потенциалов на пластинах 300 *в*. Через сколько секунд шарик упадет на нижнюю пластину, если разность потенциалов уменьшить на 60 *в*?

6. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью v_0. Длина обкладок конденсатора равна l. Определить напряженность поля в конденсаторе и направление скорости электрона при вылете его из конденсатора, если абсолютное значение этой скорости равно v_1.

7. Проволочный виток, имеющий площадь $S = 6\,000$ *см*^{2}, разрезан в некоторой точке и в разрез включен конденсатор емкостью 20 *мкф*. Виток помещен в однородное магнитное поле, магнитные линии которого находятся под углом 30° к плоскости витка. Индукция магнитного поля равномерно изменяется во времени со скоростью 0,005 *тл/сек*. Определить заряд конденсатора.

Е. Беговатов, Р. Галиуллин, Б. Лаптев

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

В «Кванте», 1973, № 7 мы рассказывали об Уральском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. А. М. Горького. В этом номере мы приводим образцы вариантов письменного экзамена по математике и задач устного экзамена по физике на математико-механическом и физическом факультетах в 1975 году.

Математика

Математико-механический факультет

Вариант 1

1. Первая ткацкая фабрика за k дней (k — целое число) выпустила 80 640 *м* ткани,

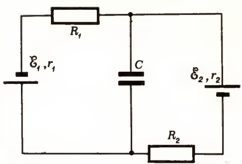


Рис. 2.

а вторая, затратив на один рабочий день больше, выпустила 139 840 *м* той же ткани. Известно, что за один день вторая фабрика выпускает по крайней мере на 8000 *м* ткани больше первой. Сколько метров ткани производит каждая фабрика за один рабочий день?

2. В прямоугольный треугольник вписан круговой сегмент так, что его хорда лежит на гипотенузе, а дуга, равная $\pi + 2\alpha$, касается катетов. Один из острых углов треугольника равен α. Ближайший к вершине угла $\frac{\pi}{2} - \alpha$ конец хорды сегмента совпадает с серединой гипотенузы. Доказать, что угол α удовлетворяет соотношению $\operatorname{ctg} \alpha = -2\cos 2\alpha$.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0, \\ x|x| + y|y| = -2. \end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\log_{\cos x}\left(\cos x - \frac{1}{4}\sin x\right) = 3.$$

Вариант 2

1. В цехе имеется 8 станков, на каждом из которых производится по 5 изделий в день. Цех получил заказ на 440 изделий. Перед началом работы оказалось, что k станков вышло из строя. После выпуска 150 изделий были отремонтированы старые и введены в строй еще $2k$ станков той же производительности. Известно, что цех на 10-й день (до окончания рабочего дня) выполнил заказ. Сколько изделий по этому заказу выпустил цех за 10-й день работы?

2. В прямоугольный треугольник вписан круговой сегмент так, что его хорда длины l лежит на гипотенузе, а дуга, содержащая 240°, касается катетов. Найти гипотенузу треугольника, если один из его острых углов равен 30°.

3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - x - y^2 = -0{,}25, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 0{,}5. \end{cases}$$

4. Решить уравнение
$(\log_{\cos x} \sin x)(1 + \log_{\sin x} \operatorname{tg} x) = 1.$

Физический факультет

Вариант 3

1. Две машинистки вместе напечатали 167 страниц. Первая работала без перерыва, а вторая делала перерыв на 1 час. К моменту окончания перерыва оказалось, что обе напечатали по 60 страниц. Напечатав 72 страницы, первая машинистка закончила работу. Насколько позднее закончила работу вторая машинистка, если известно, что она печатает в час на 3 страницы больше первой?

2. В шаре радиуса R хорда AB равна R. Пусть точки C и D лежат на поверхности шара и угол ACB прямой, а угол ADB равен $60°$. Найти угол между плоскостями ACB и ADB.

3. При каждом действительном значении параметра a найти наименьший корень уравнения
$$x^3 + 2ax^2 - (a+1)^2 x = 2a(a+1)^2.$$

4. Решить систему
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{11}{16}, \\ \sin\dfrac{x+y}{2} \cos\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{5}{8}. \end{cases}$$

Вариант 4

1. Велосипедист проехал путь из A в B, равный 60 *км*, с постоянной скоростью. Обратно он в течение часа едет с той же скоростью, затем делает остановку на 20 минут. После остановки он продолжает путь, увеличив скорость на 4 *км/час*. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь он потратил не меньше времени, чем на путь из A в B?

2. Через касательную к шару радиуса R проведены две плоскости под углом $45°$ друг к другу. Найти радиусы сечений шара этими плоскостями, если известно, что они относятся как $1:2$.

3. Решить систему
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-1} + x < 1, \\ x^2 + x - 2 < 0. \end{cases}$$

4. При каждом действительном значении параметра a решить уравнение
$$a(a - \sin x)\sin x - a(a - \cos x)\cos x = \cos x - \sin x.$$

Физика

Математико-механический факультет

1. Пуля массой m попадает в деревянный брусок массой M, подвешенный на нити длиной L (баллистический маятник), и застревает в нем. Определить, на какой угол α отклонится маятник, если скорость пули равна v.

Рис. 3.

2. Оцените массу земной атмосферы, если известно, что радиус Земли $R_З = 6400$ *км*.

3. Электровоз движется со скоростью 72 *км/час*, развивая при этом в среднем силу тяги $5 \cdot 10^4$ *н*. Найти ток, проходящий через мотор электровоза (без учета потерь), если напряжение на зажимах мотора 500 *в*.

4. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $30°$. Показатель преломления первой среды $n_1 = 2{,}4$. Определить показатель преломления второй среды, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

Физический факультет

1. Тело массой 1 *кг* скользит по наклонной плоскости длиной 21 *м*, которая образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Скорость тела у основания наклонной плоскости 4,1 *м/сек*. Вычислить количество теплоты, выделившееся при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела была равна нулю.

2. Электрическая лампа накаливания наполнена азотом при давлении 600 *мм рт. ст.* Емкость лампы 500 *см*^{3}. Сколько воды войдет в лампу, если у нее отломить кончик под водой на глубине 10 *м* от поверхности? Атмосферное давление считать равным 760 *мм рт. ст.* Плотность ртути 13,6 *г/см*^{3}.

3. На рисунке 3 дана линза LL и ход луча AA_1A_2, прошедшего через линзу. Построить ход луча BB_1.

4. Солнечные лучи, падающие под некоторым углом на плоское горизонтальное зеркало, отражаясь, попадают на вертикальный экран. На зеркале стоит непрозрачная пластинка высотой h. Определить размер тени на экране.

Э. Голубов, Р. Емлин

Московский технологический институт

В Московском технологическом институте имеются следующие факультеты: механико-технологический (готовит инженеров-механиков и инженеров-технологов); химико-

технологический факультет (готовит инженеров химиков-технологов и инженеров-технологов); инженерно-экономический факультет (выпускники факультета получают квалификацию инженера-экономиста по учету); художественно-технологический факультет. При институте есть дневное подготовительное отделение и вечерние подготовительные курсы.

С 1974/75 учебного года все первые курсы обучаются по новым учебным планам, в которых существенно повышена роль математики в подготовке инженеров. На факультетах МТИ, кроме общего курса высшей математики, читаются курсы теории вероятностей и математической статистики, математического программирования, а также ряд спецкурсов, в частности, основы математической теории эксперимента. Наибольшая математическая подготовка обеспечивается на инженерно-экономическом и механико-технологическом факультетах, на химико-технологическом факультете введен курс вычислительной математики. На всех технологических факультетах введено обучение работе на ЭВМ.

На различных факультетах требования по математике разные, что учитывалось при составлении вариантов. Ниже приводятся некоторые варианты вступительного письменного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике в МТИ 1975 года.

Математика

Инженерно-экономический факультет

1. Упростить выражение

$$2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}:\left[2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)\right].$$

2. Решить уравнение

$$(1-\sin 2x)-5(\sin x-\cos x)+4=0.$$

3. Решить неравенство

$$2^{2+\sin x}+10\geqslant 3\cdot 2^{1-\sin x}.$$

4. Полная поверхность конуса в n раз больше поверхности вписанного в него шара ($n\geqslant 2$). Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

Механико-технологический факультет

1. Упростить выражение

$$\frac{a+\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[12]{(9-4\sqrt{5})^3}}{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}-\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}}+\sqrt[3]{a}.$$

2. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}<0.$$

4. В параллелепипеде все его грани — равные ромбы со сторонами a и острыми углами $\alpha=60^\circ$. Найти объем этого параллелепипеда.

Химико-технологический факультет

1. Упростить выражение

$$\frac{1+\cos(2\alpha+630^\circ)+\sin(2\alpha+810^\circ)}{1-\cos(2\alpha-630^\circ)+\sin(2\alpha+630^\circ)}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5.$$

4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 2β, а периметр осевого сечения равен $2p$. Определить полную поверхность конуса.

Физика

1. Объем пузырька воздуха при всплывании его со дна озера на поверхность увеличивается в 3 раза. Какова глубина озера? ($\rho=10^3$ *кг/м*^{3}, $g=9,8$ *м/сек*^{2}, $p_0=1,01\cdot 10^5$ *н/м*^{2}).

2. Летчик давит на сиденье кресла самолета в нижней точке петли Нестерова с силой 7200 *н*. Масса летчика 80 *кг*, радиус петли 250 *м*. Определить скорость самолета.

3. Известно, что Земля создает электрическое поле, напряженность которого вблизи поверхности составляет $E=130$ *в/м*. Определить электрический потенциал поверхности Земли. Радиус Земли $R=6\,400$ *км*.

4. Линия электропередачи длиной 100 *км* работает при напряжении 200 *кв*. Определить к. п. д. линии, т. е. отношение напряжения на нагрузке к напряжению, подводимому к линии. Линия выполнена алюминиевым кабелем с площадью поперечного сечения 150 *мм*^{2}. Передаваемая мощность 30 000 *квт*.

5. Лампа мощностью $P=100$ *вт* обеспечивает среднюю освещенность площадки $E=150$ *лк*. Определить световую отдачу η этой лампы, если на площадку с площадью $S=5$ *м*^{2} падает $k=50\%$ светового потока.

А. Назаретов



Над чем думают физики?

«Что такое размер и форма ядра? Всем ясно, что такое размер и форма покоящегося твердого тела. Но ведь ядро состоит из частиц, совершающих быстрые и запутанные движения. Имеет ли в таком случае смысл говорить о его размерах и форме? В качестве полезной аналогии рассмотрим пропеллер аэроплана. Вращающийся пропеллер имеет вид туманного круга, и случайный наблюдатель мог бы предположить, что он и в самом деле имеет форму круга. Однако более внимательный наблюдатель, вооруженный скоростной фотокамерой, может сделать фотоснимок, который обнаружит истинную форму пропеллера. Эта «моментальная фотография» согласуется с нашим обычным представлением о форме, в то время как «экспонированная фотография», увиденная первым наблюдателем, позволяет определить лишь среднюю форму, которая может не иметь ничего общего с истинной. Предположим теперь, что мы сделали вторую моментальную фотографию данного пропеллера или другого пропеллера, принадлежащего такому же аэроплану. На втором снимке мы увидим ту же самую форму, что и раньше,— ту же самую длину лопастей, такой же угол между ними и т. д. Отличной может быть лишь ориентация пропеллера в плоскости вращения. Пропеллер сохраняет свою форму, и, следовательно, мы можем считать его «твердым». Ситуация была бы другой, если бы мы сделали моментальные фотографии, например, двух одинаковых осьминогов. В этом случае формы спрутов на двух фотографиях почти наверняка были бы разными — спрут «мягкий».

Размеры и форму ядер также можно определить с помощью моментальных фотографий. Более того, мы можем различать «твердые» ядра, сохраняющие свою форму, и «мягкие» ядра, форма которых может меняться. Кроме того, мы можем делать снимки ядер с различным временем экспозиции. В этом случае мы будем получать не истинную форму, а лишь форму, усредненную по времени, нечто подобное расплывчатому кругу, в виде которого нам представляется вращающийся пропеллер.»

Так начинается одна из статей в десятом выпуске научно-популярного сборника «Над чем думают физики» *).

Научно - популярные сборники «Над чем думают физики» выходят с 1962 года. Каждый из них посвящен какому-либо крупному разделу современной физики — физике атомного ядра, элементарным частицам, физике твердого тела, квантовой микрофизике, астрофизике. Все статьи заимствованы из широко известного американского научно-популярного журнала «Scientific American». Авторами статей являются крупные ученые разных стран, рассказывающие о проводимых ими исследованиях. Это — своеобразный репортаж с самых передовых рубежей современной науки. Как правило, в этих статьях высокий научный уровень содержания успешно сочетается с увлекательной и доступной формой изложения. Авторы почти не прибегают к математическому аппарату, но зато широко используют убедительные примеры, глубокие физические аналогии, модели и другие приемы популяризации. Немало помогают в постижении рассказываемого и великолепные схематические рисунки, которыми щедро снабжена каждая статья.

Человечество остро нуждается в энергии. Чем совершеннее наша техника и комфортабельнее жизнь, тем больше энергии мы расходуем. Последние несколько десятилетий мировые расходы энергии удваивались в среднем примерно за каждые 10 лет. По прогнозам американских энергетиков США к 2030 году увеличат расход энергии в 10 раз. Темпы роста советской энергетики еще более высоки. Однако капиталистический мир уже не первый год живет в условиях жесткого энергетического кризиса. Слишком быстро тают запасы природного топлива — угля, нефти, газа. К тому же оно является теперь весьма ценным сырьем для предприятий большой химии. Данные Международных энергетических конгрессов свидетельствуют о том, что этих запасов хватит менее чем на одно столетие. Ну, а что же потом?

Человечество связывает свои надежды на будущее с атомной и термоядерной энергетикой. О физических основах этой во многих отношениях еще будущей энергетики и рассказывается в десятом выпуске сборника «Над чем думают физики».

В нем помещено тринадцать статей. Шесть из них рассказывают о физике атомного ядра — размерах и форме ядер, структуре их поверхности (структуре поверхности тела размером $\sim 10^{-12}$ *см*!), механизме деления тяжелых ядер, замы-

*) Над чем думают физики, выпуск 10. М., «Наука», 1974. 184 с., ц. 80 коп.

кающих периодическую систему элементов, круговороте радиоактивиых изотопов и примеиеиии иейтроиов для иаучиых исследоваиий. Седьмая статья посвящеиа так иазываемым атомиым реакторам-размиожителям, которые ие только сжигают ядериое топливо, ио, одиовремеиио, производят новое искусствеииое ядериое топливо, да еще в количестве, большем сгоревшего. Имеиио с этими реакторами связаны сейчас наиболее важные исследоваиия в области атомиой энергетики.

Далее следуют четыре статьи об исследоваииях в области управляемых термоядериых реакций — перспективы термоядериой эиергетики, проблемы удержаиия горячей плазмы виутри термоядериых устаиовок, попытки вызвать термоядериую реакцию при помощи лазериого луча и рассказ об устаиовках «Токамак», иа которых советские физики добились рекордиых результатов по нагреву и удержаиию термоядериой плазмы. Завершают сборник две статьи о новых методах ускореиия заряжеииых частиц. Хотя статьи этого сборника иаписаны в разиые годы, они удачно дополияют и развивают друг друга.

Несмотря иа то, что все статьи в этом сборнике прииадлежат иностраииым авторам, в них часто встречаются имена советских физиков. Советские физики внесли очень большой вклад как в физику атомиого ядра, так и в изучение управляемых термоядериых реакций. В сборнике рассказаио о работах академика Н. Г. Басова, который первым получил термоядериые нейтроны при облучении водородной плазмы лучом мощиого лазера. Подробио описаны советские термоядериые устаиовки «Токамак», созданиые под руководством академика Л. А. Арцимовича. Миого виимаиия уделеио критерию устойчивости термоядериой плазмы, предложениому советским физиком В. Д. Шафраиовым и америкаиским физиком Крускалом. Рассказано также о иовых методах ускореиия заряжеииых частиц, предложеииых академиками Г. И. Будкером и В. И. Векслером. Однако в сборнике встречаются и такие места, где, к сожалеиию, отсутствуют иеобходимые ссылки иа работы советских ученых. Жаль, что эти пробелы ие восполиены при переводе и редактировании сборника (хотя сами переводы сделаны очень хорошо). Так, иапример, в начале статьи о делеиии атомиых ядер следовало бы дать ссылку иа работы члеиа-корреспоидента АН СССР Я. И. Френкеля, который независимо от Н. Бора создал капельиую модель ядра и примеиил ее к процессу делеиия тяжелых ядер. В статье о реакторах-размножителях иадо было бы привести сведения о советских реакторах этого типа и прежде всего о мощиом промышлениом реакторе-размиожителе, который давно уже работает иа побережье Каспийского моря вблизи города Шевченко.

В заключеиие мы хотим привести иебольшой отрывок нз статьи В. Вола и Г. Крамера, прочитав который, читатель убедится в том, насколько живо н интересио иаписаи рецеизируемый сборник. Но прежде — два слова о методе иейтроино-активациоииого анализа, которому посвящена эта статья.

Облучая вещество иейтроиами, можио сделать его атомы радиоактивными. Исследуя испускаемые при этом радиоактивиые излучения, можио установить химический состав вещества и обнаружить имеющиеся в ием примеси, атомы которых будут испускать характериое для иих излучение.

В коице своей статьи Вол и Крамер пишут:

«Едва ли ие самое захватывающее примеиеиие иейтроиио - активациоииого анализа за последиие годы было предприиято двумя шведскими физиками С. Форсхувудом и А. Вассеиом в 1961 году при сотрудиичестве с Г. Смитом из отдела судебной медицины при уииверситете в Глазго. В течеиие длительиого времеии медики ставили под сомиеиие официальиый диагиоз, что Наполеои умер от рака в 1821 году во время ссылки иа острове Святой Елеиы. На осиове записаииых симптомов предполагалось миого различиых диагиозов: пепсииовая язва, малярия, дизеитерия и др. Для проверки гипотезы о том, что Наполеои в действительиости был отравлеи, Форсхувуд и его коллеги раздобыли волосы, бесспорио прииадлежавшие Наполеоиу. Оии были сбриты с его головы в иочь после смерти, очевидио, для того, чтобы распростраиять их как сувеииры, а также для сиятия маски. Несколько волосков было облучеио иейтроиами в ядериом реакторе. Затем последовательио полумиллиметровые участки довольио длиииых волос исследовались иа присутствие в иих мышьяка. Коицентрация мышьяка в сегмеитах волос была гораздо выше иормальной. Это указывает иа возможность хронического отравлеиия Наполеоиа мышьяком. Кроме того, содержание мышьяка было ие одииаковым по длиие волос. По-видимому, Наполеоиу давали мышьяк с перерывами, не каждый деиь. Зная, что волосы иа голове в среднем вырастают за день иа 0,35 *мм*, ученые пришли к выводу, что периоды иаивысшей коицентрации мышьяка в волосах совпадают с теми диями, когда, судя по записям, Наполеон был особеиио болеи во время неволи. Таким образом, исходя из коицентрации мышьяка, содержащегося в волосах современиых здоровых людей, можио прийти к выводу, что Наполеои скорее всего умер от отравления мышьяком, который ему давали под видом лекарства во время болезии».

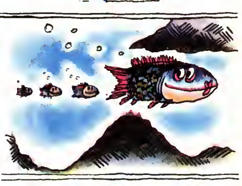
В. Лешковцев

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. В трех одинаковых коробках лежат по два шарика: в одной — два черных, в другой — два белых, в третьей — белый и черный. На каждой коробке есть табличка: на одной изображены два белых шарика, на другой — два черных, на третьей — белый и черный. Но известно, что содержимое каждой коробки не соответствует табличке. Как, вынув только один шарик только из одной коробки, переставить таблички на коробках в соответствии с их содержимым?

2. В озере плавает рыба. Она все время плывет в горизонтальном направлении. Дно озера очень неровное. Рыба проплывает то над глубокой впадиной, то над подводной горой, то попадает под нависшую скалу. Какие силы действуют на рыбу в этих трех случаях?



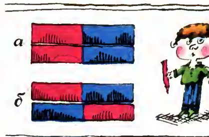
3. Из спичек сложили три неверных равенства (см. рисунок). Переложите в каждом равенстве по одной спичке так, чтобы равенства стали верными.

XII + IX = II

X = VII − III

VI − VI = XI

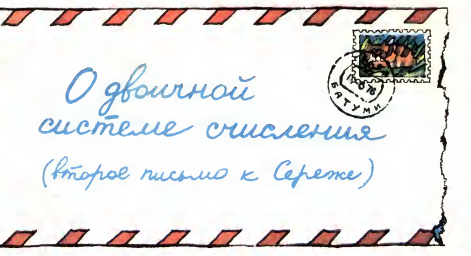
4. Два одинаковых прямолинейных магнита соединили один раз, как показано на рисунке *а*, другой раз — так, как показано на рисунке *б*. Нарисуйте линии индукции магнитных полей в этих двух случаях.



5. На рисунке зашифрован процесс деления (уголком), в котором цифры зашифрованы буквами. Расшифруйте пример.







Здравствуй, дорогой Сережа!

На днях получил твое письмо. Оно меня очень обрадовало. Ты пишешь, что внимательно прочел заметку «О системах счисления» в «Кванте» № 8 за 1975 год и решил все предложенные там задачи. Разве можно усомниться в этом, когда в конце письма значится: «Писано в Москве, в воскресенье, 112-го сентября 30400 года»? *). Ох, и оригинальный же ты человек, Сережа! Правда, мне не совсем понятно, почему число и год ты записал в разных системах. Впрочем, в данном случае — это твое право.

Ну, а теперь приступим к делу.

1. Как я и обещал, сегодня у нас речь пойдет о двоичной системе счисления. Это — самая простая система счисления. В ней только две цифры — 0 и 1. Число 2, т. е. *основание системы*, запишется как 10. Ты, конечно, это отлично знаешь.

Вот как запишутся в двоичной системе числа первого десятка: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010.

Таблица сложения в этой системе состоит из единственного равенства: $1+1=10$. (Равенства $0+0=0$, $0+1=1+0=1$ можно опустить — ведь прибавление нуля не меняет числа!)

А как с таблицей умножения? Собственно говоря, никакой таблицы умножения в двоичной системе и нет — нужно только знать, что любое число, умноженное на нуль, есть нуль, и что умножение на единицу числа не меняет.

Арифметические действия над многозначными числами в двоичной системе выполняются по тем же правилам, что и в десятичной. Рассмотрим конкретные примеры.

1) Сложим числа 101101 и 10100. Запишем одно число под другим, соблюдая разряды:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 101\,101 \\ 10\,100 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$1+0=1$; $0+0=0$; $1+1=10$, — 0 пишем, 1 в уме; далее, $1+0=1$, да еще 1, будет 10, — опять 0 пишем, 1 — в уме; наконец 1, да еще 1 (то, что было «в уме») дают 10. Итак, получим:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 101\,101 \\ 10\,100 \end{array} \\ \hline 1\,000\,001 \end{array}$$

*) 14 сентября 1975 года. В первом письме к Сереже («Квант», 1975, № 8, с. 59) рассказывалось о разных системах счисления. Так, число 14, записанное в десятичной системе, то есть 14_{10} (индекс 10 — это основание системы счисления) — это число 112 в троичной системе счисления; поскольку $14_{10}=1\cdot3^2+1\cdot3+2\cdot3^0$. А число 1975_{10} в *пятеричной* системе счисления запишется как 30 400, так как $1975_{10}=3\cdot5^4+0\cdot5^3+4\cdot5^2+0\cdot5^1+0\cdot5^0$.

Проверим правильность наших вычислений. Для этого данные числа запишем в десятичной системе. Имеем:

$$101101_2=1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+$$
$$+0\cdot2^1+1\cdot2^0=45_{10},$$
$$10100_2=1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+$$
$$+0\cdot2^0=20_{10}.$$

Сумма этих чисел должна равняться 65. Так и есть: $1000001_2=$
$$=1\cdot2^6+0\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+$$
$$+0\cdot2^1+1\cdot2^0=65_{10}.$$

2) Умножим теперь число 1101 на число 110. Имеем:

$$\begin{array}{r} 1101\\ \times\quad 110\\ \hline 11010\\ 1101\\ \hline 1001110 \end{array}$$

Проверку этого, а также следующих результатов:

$$\begin{array}{r} -\ 111\,010\,111\\ 1\,100\,001\\ \hline 101\,110\,110 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\ 111100 & 1010\\ \cline{2-2} 1010 & 110\\ \cline{1-1} -\ 1010 & \\ 1010 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

сделай сам.

Кроме того, выполни действия и проверь правильность полученных ответов в следующих примерах: 10101+101, 111110+1011, 101101—111, 10101·101, 11011 : 11, 1001110001 : : 1111101.

2. Как видишь, двоичная система и в самом деле очень простая. Правда, по сравнению с десятичной она довольно громоздка, но, оказывается, у нее есть ряд преимуществ.





Рис. 1.

Расскажу только об одном.

Предположим, что для обозначения чисел мы используем . . . пальцы рук. Так поступают, например, судьи баскетбольных матчей, показывая «на пальцах» номер игрока, получившего персональное замечание. Если номер игрока не больше десяти, то судья просто показывает соответствующее число пальцев; если же номер больше десяти, то судья показывает пальцы одной руки, зажатые в кулак — это десяток, и добавляет нужное число пальцев другой руки — единицы. Так он может показать номера 11, 12, 13, 14, 15. А как быть, если игроков больше (т. е. если матч не баскетбольный, а, например, футбольный)?

Представим теперь на минутку, что судья пользуется не десятичной, а двоичной системой счисления. Как ты думаешь, какие числа сможет он показывать пальцами только одной руки? Наверное, ты не поверишь, если я скажу, что он сможет показать любое число от единицы до тридцати одного включительно? Тем не менее это так. В самом деле, условимся согнутым пальцем обозначать нуль, а выпрямленным — единицу. Тогда мы сможем показывать все числа от 00001_2 до 11111_2; а последнее и есть 31_{10}.

На рисунке 1 показано несколько чисел, «записанных пальцами».

Подумай, сколько чисел можно «записать», если использовать пальцы обеих рук?

3. В заключение, дорогой Сережа, хочу рассказать тебе об одном фоку-

се: его с успехом демонстрируют на своих Праздниках математики учащиеся Батумской школы № 7.

Возьмем какие-либо 15 названий — пусть, к примеру, это будут названия геометрических фигур: *точка*, *прямая*, *луч*, *отрезок* и т. д. — см. таблицу 1.

Составим из названий, помещенных в таблице 1, еще четыре таблицы (таблицы 2—5).

«Фокусник», показывая зрителям сводную таблицу, просит задумать название какой-либо фигуры. Потом, стоя спиной к таблицам 2—5, просит одного из зрителей сказать, в каких из этих таблиц присутствует задуманное им название. Получив ответ, он сразу называет, какая фигура была задумана. Затем он обращается к следующему зрителю и опять безошибочно называет задуманную фигуру и т. д. Зрители поражены.

А стоит ли поражаться? Секрет фокуса заключается в том, чтобы уметь переводить числа из двоичной системы счисления в десятичную. Уверен, что ты уже раскрыл его. Если нет, подумай — и наверняка найдешь ключ к отгадке. (Между прочим, можно брать и больше названий, например 31, или 63, или 127 и т. д. Но тогда придется составлять не четыре, а соответственно пять, шесть или семь таблиц.)

Ну, вот и все. Надеюсь, у тебя появилось желание поглубже познакомиться с системами счисления, в том числе и с двоичной. Могу порекомендовать литературу. Это книга С. В. Фомина «Системы счисления», М., 1975, и статья Р. С. Гутера «Системы счисления и арифметические основы работы электронных вычислительных машин» (см. книгу «Дополнительные главы по курсу математики», учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7—8 классов; хотя эта книга написана для учащихся 7—8 классов, многое в ней доступно и школьникам 5—6 классов).

Таблица 1

1. Точка	8. Четырехугольник
2. Прямая	9. Параллелограмм
3. Луч	10. Прямоугольник
4. Отрезок	11. Ромб
5. Ломаная	12. Квадрат
6. Угол	13. Трапеция
7. Треугольник	14. Окружность
	15. Круг

Таблица 2

Точка
Луч
Ломаная
Треугольник
Параллелограмм
Ромб
Трапеция
Круг

Таблица 3

Прямая
Луч
Угол
Треугольник
Прямоугольник
Ромб
Окружность
Круг

Таблица 4

Отрезок
Ломаная
Угол
Треугольник
Квадрат
Трапеция
Окружность
Круг

Таблица 5

Четырехугольник
Параллелограмм
Прямоугольник
Ромб
Квадрат
Трапеция
Окружность
Круг

С нетерпением жду твоего письма.
Желаю успеха!
А. Бендукидзе



К статье «Температура, теплота, термометр»

1. Отношение значений абсолютных температур кипения воды и таяния льда по опытным данным равно

$$\frac{T_{к}}{T_0} = 1,3661 .$$

На шкале Фаренгейта интервал между значениями температур, соответствующих $T_к$ и T_0, разделен на 180 частей-градусов. Поэтому

$T_к - T_0 = 1,3661\ T_0 - T_0 = 0,3661\ \ T_0 = 180$, откуда

$$T_0 = \frac{180}{0,3661} \approx 491,67.$$

Иными словами, интервал значений температур от абсолютного нуля до температуры таяния льда на шкале Фаренгейта должен быть разделен на 491, 67 частей-градусов. Так как температуре таяния льда на этой шкале соответствует отметка $+32°F$, то абсолютному нулю должна соответствовать отметка — 459,67°F.

Пользуясь аналогичными рассуждениями найдем, что по шкале Реомюра абсолютному нулю температуры соответствует отметка —218,52°R.

2. $$\overline{E} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}\,kT = \frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}\ дж/град \cdot 10^3\ град}{2} = 2,07 \cdot 10^{-20}\ дж.$$

3. По той же формуле, что и в задаче 2 получаем

$$\overline{E} = 4,14 \cdot 10^{-16}\ дж.$$

4. При комнатной температуре ($T \approx 300°K$) средняя кинетическая энергия молекул газа равна

$$\overline{E} = \frac{3}{2}\ kT = 6,21 \cdot 10^{-21}\ дж.$$

Так как 1 $эв = 1,6 \cdot 10^{-19}$ $дж$, то

$$\overline{E} = \frac{6,21 \cdot 10^{-21}}{1,6 \cdot 10^{-19}}\ эв \approx 3,9 \cdot 10^{-2}\ эв.$$

5. Постоянная Больцмана равна $1,38 \times 10^{-23}$ $дж/°K$. Градус Фаренгейта в 1,8 раз меньше градуса Кельвина. Поэтому

$$k = \frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,8} = 7,6 \cdot 10^{-24}\ дж/°F.$$

К статье «Чертеж в геометрической задаче»

1. Указание. Рассмотреть отдельно случаи, когда точка D лежит внутри или вне треугольника ABC; воспользоваться теоремой о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. $a\sqrt{2}\,(2-\sqrt{3})/2$.

3. $R\,|\cos 2\varphi\,|$; $\frac{4}{3}\ R^3 \sin^2 2\varphi \sin^3\varphi \sin\alpha$.

Указание. Заметить, что вычисления проводятся по-разному, в зависимости от того, лежит центр описанного шара внутри или вне пирамиды.

4. 6/5. Указание. Рассмотреть два случая: указанные в условии задачи прямые пересекают стороны параллелограмма или их продолжения; убедиться, что в первом случае чертеж не соответствует условию задачи.

5. Условию задачи удовлетворяют три шара; их радиусы $r_1 = 1$ (внутреннее касание), $r_{2,3} = (3 \pm \sqrt{5})/2$ (внешнее касание).

6. $$\frac{-4h^3 \sin^3 \frac{\alpha}{4}}{3 \cos \frac{3\alpha}{4}}.$$

7. $\frac{1}{4}\ a \operatorname{tg}\alpha$; $\frac{1}{4}\ a \operatorname{ctg}\alpha$.

8. $\sqrt{7}/4$.

9. $(8\sqrt{3} + 12)/3$.

10. $(\alpha + \beta)/2$.

К статье «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Отделение политэкономии экономического факультета

1. За 3 часа 15 минут.

2. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi$,

где n — целое. Указание. Привести уравнение к виду $(1 + \sin x)(1 - 2\cos x) = 0$.

3. $x = 1$, $y = {}^1/_2$. Указание. Из первого уравнения системы следует, что $y = 1/(2x)$ или $y = 8x^3$, причем $\log_{2x} y < 0$.

4. $S = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{1 + \sin^2 2\alpha}$. Указание.

Обозначить гипотенузу треугольника через a, опустить на нее перпендикуляр из центра окружности и по теореме Пифагора вычислить радиус окружности.

5. $x = 0$. Указание. Обозначить $\sqrt{x} + 3$ через y и найти наименьшее значение выражения $y + \frac{1}{y}$ при $y \geqslant 3$.

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. $x = \pm\arccos(\log_{2+\sqrt{3}} 2) + k\pi$, где k — целое. Указание. Заметить, что $\sqrt{7 \pm 4\sqrt{3}} = 2 \pm \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3} = 1/(2 + \sqrt{3})$ и обозначить $(2 + \sqrt{3})^{\cos x}$ через t.

2. $\angle AMC = 85°$.

3. $x = 5$. Указание. Обозначить $\sqrt{x-1}$ через u, $x - 3$ через v.

4. Одна путевка 1-го типа и 16 путевок 2-го типа.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. В 5 раз.

2. $x = 5$. Указание. Значения x, удовлетворяющие данному уравнению при *любом* значении a, удовлетворяют этому уравнению, *в частности*, при $a = 0$. Но при $a = 0$ уравнение имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = 2$. Непосредственная проверка показывает, что лишь первый из них удовлетворяет данному уравнению при любом значении a.

3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$,

$$x_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{13} + \frac{k\pi}{2},$$

где k — целое.

4. 117π. Указание. Привести уравнение к виду $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ и найти (как суммы арифметических прогрессий) суммы соответствующих корней (по 6 в каждой серии).

5. $a/8$.

Факультет психологии

1. За 5, 4 и 8 дней соответственно.

2. $150 + \frac{250\sqrt{3}}{3}$.

3. $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, где k — целое.

4. $4 - \sqrt{3} \leqslant x < 3$, $x \geqslant 4 + \sqrt{3}$.

5. $x = 1$, $y = 37$. Указание. Выразив из данного уравнения y через x: $y = -x + 1 + \frac{111}{2x+1}$, заметить, что $2x + 1$ может быть лишь одним из четырех делителей числа 111.

К статье «Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина»

Физический факультет

1. $2\ mg$.

2. $v_1 = 30$ *м/сек*; $v_2 = 10$ *м/сек* (в этом случае тело должно быть брошено вверх с высоты, большей ≈ 40 *м*).

3. $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt[3]{1 + 0{,}01n}$.

4. Разность потенциалов и заряд на конденсаторе C равны нулю; $C_{AB} = \frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2} = 1{,}5$ *мкф*; заряды на конденсаторах C_1 и C_2 равны $q = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}U_{AB} = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ *к*; разности потенциалов на конденсаторах C_1 и C_2 равны соответственно $U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}U_{AB} = 7{,}5$*в* и $U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}U_{AB} = 2{,}5$*в*.

5. $a = 1/11g = 0{,}89$ *м/сек*^{2}.
6. $E = 2I/R^2 = 80$ *лк*.
7. $d_1 = 18$ *см*; $d_2 = 6$ *см*.

Механико-математический, химический факультеты и факультет прикладной математики

1. $\mu = 0{,}5(\sqrt{2} - 1) = 0{,}2$.
2. Цилиндр раньше соскользнет.
3. На $6\ mg$.
4. $\Delta t = \frac{1}{nc}(gh - v^2/2)$.
5. $\rho_1 = 2$ *кг/м*^{3}; $\rho_2 = 1{,}3$ *кг/м*^{3}.
6. $E = 8I/R^2 = 800$ *лк*.
7. $S_1S_2 = 0{,}5F$; $S_1S_3 = 4F$; $S_2S_3 = 4{,}5F$. Указание. См. рис. 1.

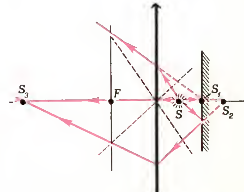


Рис. 1.

К статье «Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова (Ленина)»

Математика

Вариант 1

1. При $m \geqslant 2$ и $m \leqslant 0$ решений нет; при $1 < m < 2$ и n четном решений нет, при n нечетном

$$x_1 = \pi - \arcsin \sqrt[n]{1-m},$$

$$x_2 = 2\pi + \arcsin \sqrt[n]{1-m};$$

при $0 < m \leqslant 1$

$$x_1 = \arcsin \sqrt[n]{1-m} \text{ (при } m \neq 1),$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \sqrt[n]{1-m}$$

при нечетных n, а при четных n еще

$$x_3 = \pi + \arcsin \sqrt[n]{1-m},$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin \sqrt[n]{1-m} \text{ (при } m \neq 1).$$

2. При $a = 0$ решений нет, при $a \neq 0$ решение $-|a| < x < |a|$.
3. 4π.

Вариант 2

1. $x > \log_2 \frac{5+\sqrt{33}}{2}$.
2. $x = 5$.
3. 4π.

Вариант 3

1. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ x_2 = \pi + 2k\pi,$

$$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{5\sqrt{2}}{14} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots).$$

2. $x < 0,\ 0 < x < 5/2$.
3. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$. Указание. Пусть R — радиус основания конуса, α — искомый угол, тогда высота конуса $h = R \operatorname{tg} \alpha$, радиус шара $r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Физика

1. $v_1 = 1$ *м/сек*; $v_2 = 1{,}5$ *м/сек*.
2. $F_{\min} = (k_1 + k_2)(m + M) g$.
3. $x = \frac{p}{2\rho g}\left(\sqrt{1 - \frac{2\rho g L}{p}} - 1\right)$.
4. $C = \frac{q(R_1 + R_2 + r_1 + r_2)}{\mathscr{E}_1 (R_2 + r_2) - \mathscr{E}_2 (R_1 + r_1)}$.
5. $t = \sqrt{\frac{2lU_1}{g(U_1 - U_2)}} \approx 9 \cdot 10^{-2}$ *сек*.
6. $E = \frac{mv_0}{el}\sqrt{v_1^2 - v_0^2}$; угол отклонения скорости от первоначального направления равен $\varphi = \arccos v_0/v_1$.
7. $q = CS \frac{\Delta B}{\Delta t} \sin \alpha = 3 \cdot 10^{-8}$ *к*.

К статье «Уральский государственный университет им. А. М. Горького»

Математика

Вариант 1

1. Первая фабрика производит в день 26 880 *м* ткани, вторая — 34 960 *м* ткани. Указание. В силу условий задачи неизвестный параметр k удовлетворяет неравенству

$$\frac{139\,840}{k+1} - \frac{80\,640}{k} \geqslant 8000.$$

Отсюда следует неравенство $25k^2 - 160k + 252 \leqslant 0$. Решая последнее неравенство, получаем $\frac{14}{5} \leqslant k \leqslant \frac{18}{5}$. Поскольку k — целое число, находим $k = 3$.

2. Пусть треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи (рис. 2), т. е. $\angle BAC = \alpha$, $\smile DFGE = \pi + 2\alpha$, E — середина гипотенузы AB. По условию $\angle DOE = 2\pi - (\pi + 2\alpha) = \pi - 2\alpha$. Поэтому $\angle ODE = \angle OED = \alpha$. Значит, $DO \parallel AC$ и точки D, O и G лежат на одной прямой. Пусть радиус дуги сегмента равен R. Нетрудно подсчитать, что $GB = 2R \operatorname{tg} \alpha$, $CB = R + 2R \operatorname{tg} \alpha$, $AB = \frac{R + 2R \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$, $AD = \frac{R}{\sin \alpha}$, $DE = 2R \cos \alpha$. Согласно условию задачи $AD + DE = \frac{AB}{2}$, т. е. $\frac{R}{\sin \alpha} + 2R \cos \alpha = \frac{R(1 + 2\operatorname{tg} \alpha)}{2 \sin \alpha}$. Отсюда $1 + 2 \sin 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha$. Умножая обе части последнего равенства на $\operatorname{ctg} \alpha$, получаем $\operatorname{ctg} \alpha = -2 \cos 2\alpha$.

3. Первое уравнение системы можно записать в виде

$$(x + 3y)(x - y) = 0.$$

Если $x = -3y$, то из второго уравнения

системы $y\,|y| = \frac{1}{4}$, откуда $y > 0$, и следовательно, $y_1 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{3}{2}$. Если же $x = y$, то из второго уравнения системы $y\,|y| = -1$, откуда $y < 0$, и значит, $y_2 = -1$, $x_2 = -1$.

4. $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2n\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{12} + 2n\pi$, где n — целое число. Указание. Получить $x = k\pi$, $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$. Для нахождения ответа учесть, что $0 < \cos x < 1$.

Вариант 2

1. До ввода новых станков цех работал $\frac{150}{40-5k}$ дней, а после ввода — $\frac{290}{40+10k}$ дней. Из условия задачи получаем неравенство

$$\frac{150}{40-5k} + \frac{290}{40+10k} < 10,$$

откуда $10k^2 - 39k + 32 < 0$. Поскольку k — целое число, из последнего неравенства находим $k = 2$. Значит, до ввода новых станков цех работал 5 дней, затем еще 4 полных дня в цехе работало 12 станков, т. е. за 9 дней цех выпустил $150 + 4\cdot 5\cdot 12 = 390$ изделий. Таким образом, за 10-й день работы по данному заказу цех выпустил $440 - 390 = 50$ изделий.

2. $\frac{2l}{3}(2+\sqrt{3})$. Указание. Докажите, что если D — ближайший к углу 30° конец хорды сегмента, O — центр окружности сегмента, а E — точка касания сегмента с катетом, лежащим против этого угла, то точки D, O, E лежат на одной прямой.

3. Первое уравнение системы можно представить в виде

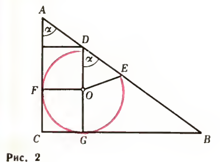


Рис. 2

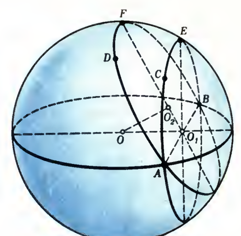


Рис. 3.

$$\left(x - \frac{1}{2} - y\right)\left(x - \frac{1}{2} + y\right) = 0.$$

Если $x = \frac{1}{2} + y$, то из второго уравнения находим $\sqrt{\frac{1}{2} + y} + \sqrt{y} = \frac{1}{2}$. Последнее уравнение корней не имеет. Если же $x = \frac{1}{2} - y$, то второе уравнение системы приводится к виду $\sqrt{\frac{1}{2} - y} + \sqrt{y} = \frac{1}{2}$. Отсюда $\sqrt{y} < \frac{1}{2}$, т. е. $y < \frac{1}{4}$. Но при $y < \frac{1}{4}$ выполняется $\sqrt{\frac{1}{2} - y} > \frac{1}{2}$, так что последнее уравнение также не имеет корней. Таким образом, система решений не имеет.

4. $x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$, где n — целое число.

Указание. Получить $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ и учесть, что $0 < \cos x < 1$ и $0 < \sin x < 1$.

Вариант 3

1. На 4/3 часа.

2. $\arcsin\frac{1}{3}$. Решение. Пусть O — центр шара, O_1 — центр сечения этого шара плоскостью ACB, O_2 — центр сечения

этого шара плоскостью ADB (рис. 3). Так как $\angle AOB$ прямой, хорда AB — диаметр окружности с центром в точке O_1. Через точку O_1 перпендикулярно AB проведем плоскость П, она пройдет через центр шара и будет перпендикулярна плоскостям ACB и ADB. Пусть E и F — точки пересечения плоскости П с окружностями сечений ACB и ADB соответственно. Очевидно, $\angle EO_1F$ является линейным углом искомого двугранного угла между плоскостями ACB и ADB. Так как $OO_2 \perp FO_1$ и $OO_1 \perp EO_1$, то $\angle EO_1F = \angle O_2OO_1$. Стороны треугольника O_2OO_1 легко найти: так как $\angle AO_2O_1 =$

$$= \angle AFB = \angle ADB = 60°, \text{ то } O_2O_1 = \frac{R\sqrt{3}}{6};$$

очевидно, $OO_1 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\sin \angle O_2OO_1 =$

$$= \frac{O_2O_1}{OO_1}.$$

3. При $a \leqslant -1$ наименьшим корнем будет $a+1$; при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ наименьшим корнем будет $-a-1$; при $a \geqslant 1$ наименьшим корнем будет $-2a$. Указание. Корнями данного уравнения являются $x_1 = -2a$, $x_2 = a+1$, $x_3 = -a-1$. Значения параметра a, при которых наименьшим корнем будет x_3, найдутся из системы неравенств

$$\begin{cases} x_3 \leqslant x_1, \\ x_3 \leqslant x_2, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} -a-1 \leqslant -2a, \\ -a-1 \leqslant a+1, \end{cases}$$

откуда $-1 \leqslant a \leqslant 1$. Аналогично можно найти значения параметра a, при которых наименьшим корнем будет x_2, а затем x_1.

4. $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi$, $y = (-1)^k \times$

$\times \arcsin \dfrac{3}{4} + k\pi$, где n и k — целые числа.

Вариант 4

1. $20 \leqslant x < 60$. Указание. Пусть x (*км/час*) — первоначальная скорость велосипедиста. Из условий задачи вытекает неравенство

$$\frac{60}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{3} + \frac{60-x}{x+4}.$$

Для получения ответа надо еще учесть, что $0 < x < 60$.

2. Радиус большего сечения равен $R\sqrt{\dfrac{10+4\sqrt{2}}{17}}$. Указание. Через точку касания прямой с шаром провести плоскость, перпендикулярную касательной. Сечение шара этой плоскостью есть большой круг, он пересекается с упомянутыми в условии задачи сечениями по их диаметрам.

3. $-2 < x \leqslant -1$.

4. При всех значениях параметра a уравнение имеет серию корней $x = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$, где n — целое число.

Физика

Математико-механический факультет

1. $\cos\alpha = 1 - \dfrac{m^2v^2}{2gL(m+M)^2}$.

2. $M_{атм} \approx 52\cdot 10^{17}$ *кг*.

3. $I = \dfrac{Fv}{U} = 2\cdot 10^3 a = 2ка$.

4. $n_2 = n_1 \dfrac{\sin\alpha}{\sin(90° - \alpha)} \approx 1{,}4$.

Физический факультет

1. $Q = 94{,}5$ *дж*.

2. $m_в = \rho_в V\left(1 - \dfrac{p_1}{p_a + \rho_в gh}\right) \approx 300$ *г*.

3. См. рис. 4.

4. $l = 2h$.

К статье «Московский электротехнический институт связи»

(см. «Квант» № 5)

Математика

Факультет автоматики, телемеханики и электроники

1. $x_1 = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi(2n+1)}{2}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$ (n — целое). Указание. Уравнение приводится к виду $\sin 3x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)$. 2. $x = 1$. Указание. Привести уравнение к виду $\left(2^x - \dfrac{2}{2^x}\right)^3 = 1$.

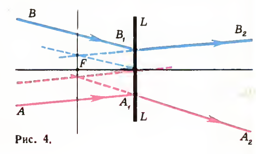


Рис. 4.

3. Указание. Корни заданного квадратного трехчлена лежат внутри отрезка [0, 1], лишь между ними трехчлен отрицателен. 4. Указание. При заданных ограничениях $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$. 5. Искомых дробей будет три: 3/8, 4/15, 5/24. Указание. Обозначим искомую дробь через $x/(x^2-1)$, тогда надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x^2-1+2} > \frac{1}{4}, \\ \frac{x-3}{x^2-1-3} < \frac{1}{10} \end{cases}$$

и отобрать только целые x.

Факультет автоматической электросвязи

1. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ (n — целое). 2. $x < -1+\sqrt{5}$. 3. $2\sqrt{3}\sin 20^\circ \sin 40^\circ$. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. 5. $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

Факультет автоматизации предприятий связи

1. $x_1 = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ (k — целое). 2. $\log_{1/2}\frac{1+\sqrt{17}}{2} < x < \log_{1/2}\sqrt{5}$. 3. $4\operatorname{tg}\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$. 4. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. 5. Искомых прогрессий будет четыре: $b = \pm 1/2$, $q = 2$; $b = \pm 4$, $q = 1/2$.

Факультет радиосвязи и радиовещания

1. $x = 8$. 2. $x = 7$. 3. $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$ (k — целое). 4. $x \leqslant -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqslant x < 3$.

5. $r = \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$.

Факультет многоканальной электросвязи

1. $-2 < x \leqslant 1$, $x \geqslant 4$. 2. $x = k\pi/7$ (k — целое). 3. 0. 4. $x_1 = 625$, $y_1 = 3$; $x_2 = 12$, $y_2 = 4$. 5. $S_ш = \frac{4}{\sin^2 2\alpha} \times \sqrt[3]{9\pi V^2 \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Инженерно-экономический факультет

1. $x_1 = \frac{k\pi}{8}$, $x_2 = \frac{2\pi n}{9}$ (k — целое, n — целое, не кратное 9). 2. $x = 8$. 3. $a = -4$. 4. Указание. Воспользоваться формулой тангенса половинного угла. 5. $A = 42$, $B = 35$.

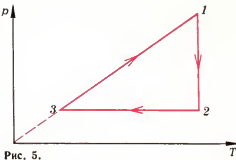


Рис. 5.

Физика

1. $h = s\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gs}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)$, если s и α отвечают условию $\operatorname{tg}\alpha > \frac{gs}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

Заметим, что камень может попасть в столб как на подъеме, так и на спуске.

2. $F = \frac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}$.

3. См. рис. 5 и 6.

4. $\varphi = \frac{\sqrt[3]{n}}{n}\varphi_0$.

5. $U \approx 22$ *в*.

6. $E \approx 4$ *в/м*.

7. $v = 8\cdot 10^6$ *м/сек*.

К статье «Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)»
(см. «Квант» № 5)

Математика

Вариант 1

1. 1632. Указание. По условию $136\cdot 21x - 136\cdot 12x = 1224$. 2. $x = -\frac{\pi}{4} +$

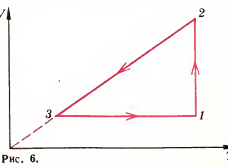


Рис. 6.

$+\pi k$ (k — целое). Указание. Уравнение приводится к виду $(\sin x+\cos x)\times\times(\cos 2x-1)=0$. 4. $x_1=1$, $x_2=10$, $x_3=0{,}001$. Указание. Положить $x=10^y$; уравнение приводится к виду $y^3+2y^2-3y=0$.

Вариант 2.

1. 63 *км/час*, 60 *км/час*. 2. $x=\pm\frac{\pi}{3}+$ $+\pi k$ (k — целое). 3. $x=5/2$. 5. $x=2$, $\alpha=\pi+2\pi k$ (k — целое) и $0<x<1$, α — любое.

Физика

1. Задачу удобно решать в системе отсчета, связанной с одним из теплоходов, например, со вторым. С точки зрения наблюдателя, находящегося на теплоходе 2, теплоход 1 движется со скоростью $\mathbf{v}_{отн}=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ по линии AC (рис. 7), и минимальное расстояние между теплоходами равно

$$l_{\min}=BD=(OB-OA)\sin 60^\circ\approx 8{,}7\ \text{мили}.$$

2. При движении ядра над поверхностью Земли созданное силой тяжести ускорение g не может рассматриваться как ускорение, с которым ядро приближается к поверхности Земли. Действительно, предположим, что линейная скорость ядра равна первой космической скорости; тогда ядро вообще не упадет на Землю, двигаясь между тем с ускорением g. Если же линейная скорость ядра меньше первой космической, ядро не сможет стать спутником Земли, а рано или поздно упадет на ее поверхность. Причем, упадет тем быстрее, чем меньше линейная скорость ядра. С точки зрения «неподвижного» наблюдателя (например, связанного с центром Земли) у «восточного» ядра линейная скорость $v'=v_я+v_3$, а у «западного» ядра — $v''=v_я-v_3$. Здесь $v_я$ — скорость ядра относительно пушки, т. е. относительно «подвижного» наблюдателя, а v_3 — линейная скорость вращения Земли вокруг своей оси. Поскольку $v'>v''$, время полета «восточного» ядра больше, чем «западного». Следовательно, «восточное» ядро улетит дальше от пушки, чем «западное».

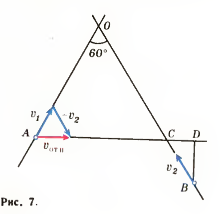


Рис. 7.

Рис. 8.

3. Работа равна изменению механической энергии спутника, равной сумме его потенциальной и кинетической энергий. Используя аналогию между законом Кулона и законом всемирного тяготения*), потенциальную энергию спутника можно вычислить по формуле $П=-\gamma\frac{mM}{R}$. Здесь γ — гравитационная постоянная, m — масса спутника, M — масса Земли, R — радиус круговой орбиты спутника. Кинетическую энергию спутника можно найти из условия движения спутника по круговой орбите: $mv^2/R=\gamma mM/R^2$, или $K=mv^2/2=\gamma mM/2R$. Тогда полная механическая энергия спутника, движущегося по круговой орбите радиуса R, равна $E=П+K=-\gamma\, mM/R+\gamma mM/2R=-\gamma mM/2R$. Изменение энергии при переходе с орбиты радиуса R_1 на орбиту радиуса R_2 равно

$$\Delta E=E_2-E_1=E_1\left(\frac{R_1}{R_2}-1\right)=5\cdot 10^9\ дж.$$

Следовательно, искомая работа равна 5 *Гдж*.

4. $$F=-\frac{\mathscr{E}^2 r_1^2 r_2^2}{(r_1+r_2)^2\, l^2}=-4{,}4\cdot 10^{-3}\ дин;$$

знак «минус» показывает, что шарики притягиваются.

5. Сила света источника равна отношению светового потока к телесному углу, в котором этот световой поток распределяется. При переходе через перегородку телесный угол увеличивается (рис. 8), а световой поток не изменяется, поэтому $I_2/I_1=\Omega_1/\Omega_2$. Из рисунка 8 $\Omega_1/\Omega_2=r_2^2/r_1^2=\sin^2\alpha_1/\sin^2\alpha_2=1/n^2$. Таким образом,

$$I_2/I_1=1/n^2,$$

т. е. сила света для наблюдателя уменьшится в n^2 раз.

*) См., например, статью С. Козела «Физические аналогии», «Квант», 1975, № 11. (*Прим. ред.*)

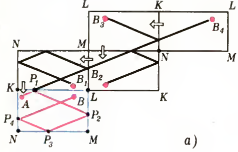




Рис. 9.

К статье «Математика биллиарда»

(см. «Квант» № 5)

1. См. § 2 статьи.

2. Если $\operatorname{tg}\alpha$ — рациональное число, то траектория периодична; в противном случае траектория непериодична.

3. Например, если начальный отрезок траектории параллелен одной из сторон треугольника, то траектория периодична. (Полный ответ такой: если α — угол между начальным отрезком траектории и одной из сторон, то траектория периодична тогда и только тогда, когда число $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ рационально!).

4. Для этих биллиардов любая траектория либо периодична, либо всюду плотно заполняет *полукольцо* или *сектор кольца*, либо заканчивается в одной из точек излома борта.

5. Отразите A относительно OM, B относительно ON и соедините полученные точки A' и B'. Прямая $A'B'$ пересекает лучи OM и ON в искомых точках P_1 и P_2.

6. (А) Это частный случай задачи 5 (точка B совпадает с точкой A).

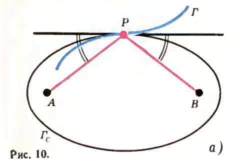
(Б) Сначала зафиксируем положение точки A на стороне MN и применим построение из задачи 6 (А). Перемещая затем точку A по стороне MN, увидим, что самый маленький периметр у треугольника ABC будет тогда, когда LA— высота треугольника ABC. Таким образом, искомый треугольник ABC образован основаниями высот треугольника MLN.

7. Отразим прямоугольник $KLMN$ вместе с точкой B последовательно относительно сторон KL, LM, MN, NK (см. рис. 9, *а*), соединим получившуюся в конце концов точку B_4 с точкой A и обратными отражениями превратим отрезок AB_4 в искомую траекторию $AP_1P_2P_3P_4B$. Траектория будет кратчайшей ломаной такого вида. Задача имеет решение не всегда: при каждом положении шара A шар B (или точка B_4) обязан находиться в соответствующей «зоне обстрела» O_A (см. рис. 9, *б*); кроме того, для шара B есть *«мертвая зона»* M_B — если шар B находится в зоне M_B, то в него никак нельзя попасть после требуемых отражений (при *любом* положении шара A); аналогичная «мертвая зона» M_A есть и у шара A — см. рисунок 9, *б*.

8. «Обратный принцип» неверен даже для выпуклых кривых (см. рис. 10, *а*, *б*).

9. Пусть $P_1P_2...P_nP_1$ — ломаная наибольшей длины. Возьмем в *принципе экстремального пути* в качестве точек A и B вершины этой ломаной через одну, т. е. P_{k-1} и P_{k+1}; очевидно, AP_kB — максимальная ломаная, и, согласно *принципу*, в точке P_k выполнен закон упругого отражения.

10. (А) Самый длинный отрезок P_1P_2 с концами на кривой Γ следует считать двузвенной периодической траекторией $P_1P_2P_1$. (Легко показать, что этот отрезок P_1P_2 перпендикулярен касательным к Γ в точках P_1 и P_2.)



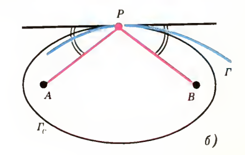


Рис. 10.

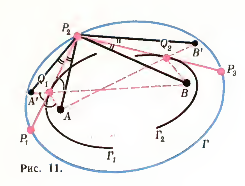


Рис. 11.

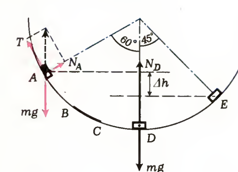


Рис. 12.

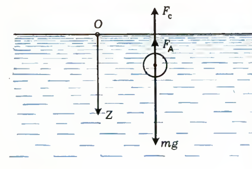


Рис. 13.

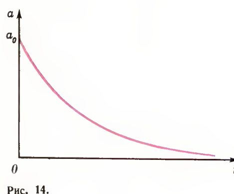


Рис. 14.

(Б) Ответ. *Не будет.* Если разрешить ломаным $P_1P_2...P_nP_1$ «самопересекаться», то при четном $n=2m$ «наидлиннейшая» ломаная вырождается в отрезок P_1P_2 из задачи 10 (А), проходимый $2m$ раз (в $P_1P_2P_1P_2P_1...$ $...P_2P_1$).

(В) Когда две вершины ломаной $P_1P_2...$ $...P_nP_1$ сливаются в одну, ее длина становится меньше (например, длина у ломаной $P_1P_3P_4...P_nP_1$ меньше, чем у $P_1P_2P_3P_4...$ $...P_nP_1$), и никакой n-звенной траектории не получится.

11. Правильные n-угольники.

12. Первое утверждение следует из оптического свойства эллипса. Докажем второе утверждение. Пусть $P_1P_2P_3...$ — рассматриваемая траектория; проведем эллипсы: Γ_1 с фокусами A и B, касающийся отрезка P_1P_2, и Γ_2 с теми же фокусами, касающийся отрезка P_2P_3, и покажем, что они совпадают. Пусть Q_1 и Q_2 — соответствующие точки касания (см. рис. 11). Эллипсы Γ_1 и Γ_2 принадлежат семейству $\{\Gamma_c\}$, где Γ_c задается соотношением $|AM|+|MB|=c$. Пусть $\Gamma_1=$ $=\Gamma_{c_1}$ и $\Gamma_2=\Gamma_{c_2}$; достаточно доказать, что $c_1=c_2$.

Рассмотрим точки A' и B', симметричные точкам A и B относительно прямых P_1P_2 и P_2P_3 соответственно. Из оптического свойства эллипсов Γ_1 и Γ_2 следует, что $c_1=|AQ_1|+|Q_1B|=|A'B|$, $c_2=|AQ_2|+$ $+|Q_2B|=|AB'|$. Но треугольники $A'P_2B$ и AP_2B' конгрузнтны, так как $|A'P_2|=$ $=|AP_2|$, $|P_2B|=|P_2B'|$ и $\widehat{A'P_2B}=\widehat{AP_2B}+$ $+\widehat{A'P_2A}=\widehat{AP_2B}+\widehat{BP_2B'}=\widehat{AP_2B'}$ (углы $A'P_2A$ и BP_2B' равны, так как в силу оптического свойства эллипса Γ равны углы AP_2P_1 и BP_2P_3!). Следовательно, $|A'B|=$ $=|AB'|$ и $c_1=c_2$.

13. Эта задача решается аналогично задаче 12, только вместо эллипсов Γ_c нужно рассмотреть гиперболы H_c, задаваемые соотношениями $||AM|-|MB||=c$, и использовать *оптическое свойство гиперболы*: для любой точки M на гиперболе H_c отрезки MA и MB образуют равные углы с касательной к H_c в точке M.

16. «Намотав» отрезок $0\leqslant x\leqslant 1$ на окружность Γ длины 1, получим на Γ последовательность точек $\{P_n=a_n\}$, удовлетворяющую условиям теоремы Якоби.

17. Если c^n начинается с набора цифр A, то для некоторого k имеем $A\cdot 10^k\leqslant c^n<$ $<(A+1)\cdot 10^k$, т. е. $k+\lg A\leqslant n\cdot\lg c<$ $<k+\lg(A+1)$, или $\{\lg A\}\leqslant\{n\cdot\lg c\}<$ $<\{\lg(A+1)\}$. Осталось воспользоваться иррациональностью числа $\lg c$ и применить утверждение задачи 16.

К статье «Экзамены по физике в Англии»
(См. «Квант» № 5)

1. а) На тело действуют сила тяжести mg, сила реакции опоры $\mathbf{N}_A$ и сила натяжения нити $\mathbf{T}$, причем $mg+\mathbf{N}_A+\mathbf{T}=0$ (рис. 12). б) В этом положении на тело дей-

ствуют сила тяжести mg и сила реакции опоры $\mathbf{N}_D$, при этом $N_D - mg = \frac{mv_D^2}{R}$.

в) Потеря механической энергии равна $mg\Delta h = mgR(\sqrt{2}-1)/2 \approx 12$ *дж*. г) $N_D = mg + \frac{mv_D^2}{R} = mg[1+(2-\sqrt{2})] \approx 64$ *н*.

2. При движении на тело действуют (рис. 13) сила тяжести mg, выталкивающая сила (сила Архимеда) $\mathbf{F}_A$ ($F_A = V\rho_{ж}g = \frac{m}{\rho_т}\rho_{ж}g$; $\rho_{ж}$ и $\rho_т$ — плотности жидкости и тела соответственно) и сила сопротивления $\mathbf{F}_c$ ($F_c = kv$; k — коэффициент пропорциональности). Запишем уравнение движения тела: $ma = mg - m\frac{\rho_{ж}}{\rho_т}g - kv$. В начальный момент ($v = 0$) $a = a_0 = g\left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_т}\right)$, затем ускорение уменьшается (рис. 14). В пределе (при достаточно большой высоте сосуда) движение становится равномерным со скоростью $v_{max} = \frac{m}{k}\left(1 - \frac{\rho_{ж}}{\rho_т}\right)g$ (рис. 15). График изменения координаты тела со временем приведен на рисунке 16. Аналитические выражения для a, v и z в зависимости от t можно получить, решая соответствующие дифференциальные уравнения. Если вы сумеете это сделать, то получите

$$a(t) = v_{max}\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}, \quad v(t) = v_{max}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right), \quad z(t) = v_{max}t + v_{max}\frac{m}{k}\times\left(-1 + e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

3. а) Разобьем кольцо на такие малые участки, что заряды на них можно считать точечными. Тогда силу F можно представить как сумму сил взаимодействия этих точечных зарядов с пробным зарядом. Очевидно, что при $x = 0$ $F = 0$ в силу симметрии. б) При увеличении x сила F сначала растет, но при $x \to \infty$ $F \to 0$ (так как стремятся к нулю все элементарные силы взаимодействия). Можно показать, что сила F максимальна при $x = R\sqrt{2}/2$.

4. Цилиндр будет совершать колебания вдоль вертикальной оси (обозначим ее через OZ). Если трение мало, то колебания будут затухать медленно. График зависимости $z(t)$ приведен на рисунке 17.

5. См. рис. 18.

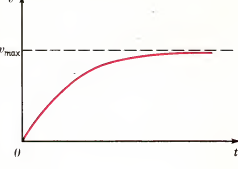


Рис. 15.

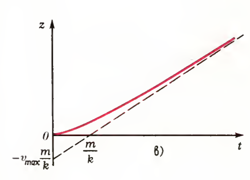


Рис. 16.

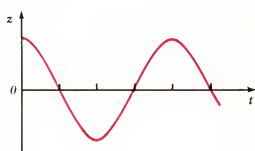


Рис. 17.

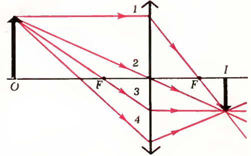


Рис. 18.

6. Для материальной точки массы m_i, движущейся по окружности радиуса r_i с угловой скоростью ω, момент импульса равен $m_i r_i^2 \omega$, а для системы n материальных точек — $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega$. В замкнутой системе полный импульс есть величина постоянная. Когда мальчик уронит гантели (не опуская рук), то а) угловая скорость его вращения не изменится; б) момент импульса всей системы (мальчик, стул, гантели) уменьшится.

7. Пусть для определенности источник света дает линейчатый спектр, тогда 1) призма позволяет получить только один спектр, а дифракционная решетка — несколько; 2) чем меньше длина волны света, тем ближе располагаются соответствующие максимумы в спектре от решетки к центральному максимуму, а для призмы наоборот — она сильнее отклоняет короткие волны, чем длинные. 3) Для источника, дающего сплошной спектр, ширина разноцветных полос в спектре от решетки одна и та же, а в спектре от призмы — нет (например, синие участки шире, чем красные).

8. Чем больше длина наклонной плоскости, тем больше время скатывания, так как конечная скорость в обоих случаях одна и та же, а ускорение пропорционально синусу угла наклона плоскости к горизонту, т. е. обратно пропорционально длине наклонной плоскости.

9. а) Стержень-перемычка начнет двигаться вправо (по правилу левой руки). б) Ускорение стержня с течением времени будет уменьшаться, так как э. д. с. индукции, возникающая в замкнутом контуре, уменьшает ток в цепи. Движение стержня аналогично движению тела в вязкой жидкости (см. задачу 2).

10. Наметим только путь решения этой задачи. а) По мере увеличения тока I в цепи температура T проволоки будет повышаться. В результате будет увеличиваться длина l проволоки (а значит, и величина провисания проволоки Δh, которую удобно измерять), ее сопротивление R и, следовательно, падение напряжения U на ней. При больших токах проволока раскалится до такой температуры, что начнет светиться, причем интенсивность излучения связана с величиной тока. Сильно нагретая проволока может гореть в воздухе, причем скорость этой реакции тоже зависит от I. Величина тока в проволоке влияет на индукцию B возникающего магнитного поля и на силу F, действующую на проволоку со стороны внешнего магнитного поля (например, магнитного поля Земли). При нагревании проволоки меняется также сила давления $F_д$ проволоки на опоры. б) Для измерений можно выбрать, например, такую тройку величин: Δh, R и B. Прежде чем проектировать эксперимент, оцените ожидаемые результаты. Например, подсчитайте, на сколько изменяется длина проволоки l и ее сопротивление R при нагревании проволоки от комнатной температуры на 100°.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 5)

1. Пусть бриллианты стоят 40 000, 60 000, 70 000, 80 000, 600 000, 610 000, 620 000, 630 000, 640 000, 650 000 долларов. Тогда все условия задачи выполнены.

2. Необходимо взять с собой тело, вес которого измерен на Земле (все равно, каким способом), и пружинные весы (динамометр). Рычажные (чашечные) весы для эксперимента не годятся. Их показания на Земле и на Луне будут одинаковыми: сами гири «уменьшатся» в весе в 6 раз.

3. Указание. Множество точек M, для которых $|AM| \leqslant |BM|$, — это полуплоскость, содержащая точку A и ограниченная срединным перпендикуляром к отрезку AB. Аналогично рассматриваем точки A и C. Чтобы объединение двух полуплоскостей покрывало всю плоскость, надо, чтобы ограничивающие их прямые были параллельны, а точка A лежала между этими прямыми.

4. Одинаковы.

5. Хватит. Указание. При первом взвешивании положите на каждую чашку весов по 3 гири.

К ребусам

(См. «Квант» № 3, 3-ю с. обл.)

«Пятью пять». $\overline{ПЯТЬ} = 2846$.

«Муха и слон». $\overline{МУХА} = 2048$, $\overline{СЛОН} = 9536$.

«Праздник». $\overline{ПИРОГ} = 92\,164$, 92 364, 92 764.

«Мозаика букв». $\overline{МОЗАИКА\,БУКВ} = 9\,327\,517\ \ 4610$.

«Шесть на шесть». $\overline{ШЕСТЬ} = 90\,625$.

К «кроссиамберу» «Их было семеро»

(См. «Квант» № 5, 3-ю с. обл.)

Джо — 3 (слитка), Джон — 11, Джоб — 2, Джекоб — 1, Джим — 5, Джерри — 7, Джефф — 9.

Номер оформили:
Е. Вереитинова, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, Э. Смирнов

Корректор *В. П. Сорокина*

113035, Москва, Ж-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62. Сдано в набор 22/III-1976 г.
Подписано в печать 10/V-1976 г.
Бумага 70×100 1/16. Физ. печ. л. 5
Усл. печ. л. 6,5 Уч.-изд. л. 7,81 Т-06975
Цена 30 коп. Заказ 544 Тираж 328 740

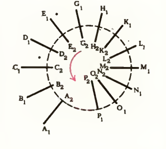
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Куда исчез мушкетер?

Эти бравые мушкетеры, затеявшие показательные поединки перед домом де Тревиля, сыграют с вами, если вы, конечно, захотите, веселую шутку. Переведите рисунок на кальку, вырежьте круг по пунктирной линии и поверните немного вокруг центра — один из мушкетеров бесследно исчезнет!

Куда он пропал? В этом вам поможет разобраться следующий рисунок. На нем вместо каждого мушкетера нарисован отрезок прямой. Все отрезки конгруэнтны, но $[B_1 B_2]$ на $^1/_{12}$ часть своей



длины ближе к центру, чем отрезок $[A_1 A_2]$; $[C_1 C_2]$ на столько же ближе к центру, чем $[B_1 B_2]$ и т. д.

Точки A_1, B_1, ..., P_1 лежат на кривой, которая называется *спиралью Архимеда*. Представьте себе, что по вращающейся грампластинке с постоянной скоростью ползет от центра T улитка $У$. Тогда относительно стола она перемещается как раз по спирали Архимеда.

Повернем теперь круг на рисунке так, чтобы точка P_2 оказалась на одном радиусе с O_1, точка O_2 на одном радиусе с N_1 и т. д. Число отрезков сократится на 1, но все они снова будут конгруэнтны, только длина каждого из них возрастет на $^1/_{12}$.

Теперь вам понятно, куда девался мушкетер?

Цена 30 коп.
Индекс 70465



Леонард Эйлер среди офицеров и солдат своего каре. (к статье «Минигеометрия»).

Эта страница обложки выполнена по мотивам рисунка известного художника Виктора Вазарели. Рисунок замечателен своей «неустойчивостью». Что именно на нем изображено? Параллелепипед со «спинкой»? (Тогда где спинка — сверху или снизу?) Или это два пересекающихся параллелепипеда? А может быть, это «невозможный объект»? (Мы рассказывали о невозможных объектах в 5 номере нашего журнала за 1971 год.) Впрочем, если постараться, можно поочередно увидеть и то, и другое, и третье.